9 Diferencijalne jednačine

Jednačina koja pored nezavisno promenljivih veličina i nepoznatih funkcija tih promenljivih sadrži još i izvode nepoznatih funkcija ili njihove diferencijale naziva se *diferencijalnom jednačinom.* Na primer

$$xy' + y - e^x = 0$$

$$(2x-y)dx + (2xy-x)dy = 0$$
$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$$
$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = t + \sin t$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ako sve nepoznate funkcije koje ulaze u diferencijalnu jednačinu zavise samo od jedne nezavisno promenljive, pa samim tim jednačina ne sadrži parcijalne izvode, ta se jednačina naziva *običnom* diferencijalnom jednačinom. Ako u jednačinu ulaze nepoznate funkcije koje zavise od više nezavisno promenljivih, pa se u jednačini pojavljuju parcijalni izvodi nepoznatih funkcija, ta se jednačina naziva *parcijalnom* diferencijalnom jednačinom.

Mi ćemo ovde razmatrati samo obične diferencijalne jednačine, odnosno jednačine u kojim se pojavljuju nepoznate funkcije koje zavise samo od jedne nezavisno promenljive. Ako se u običnoj diferencijalnoj jednačini pojavljuje samo jedna nepoznata funkcija, sa svojim izvodima, onda takva jednačina ima opšti oblik

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Najviši izvod koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednačini naziva se *redom* diferencijalne jednačine, pa ćemo za gornju jednačinu reći da je n-tog reda.

Najpre ćemo razmotriti najjednostavnije diferencijalne jednačine, a to su jednačine *prvog* reda, čiji je opšti oblik

$$F(x, y, y') = 0$$

odnosno, kada je jednačina rešena po y'

$$y' = f(x, y).$$

Ako neka funkcija $\varphi(x)$ zajedno sa svojim prvim izvodom zadovoljava diferencijalnu jednačinu, odnosno ukoliko jednačina postaje identitet kada se y i y' u jednačini zamene sa $\varphi(x)$ i $\varphi'(x)$ onda se funkcija $\varphi(x)$ naziva *rešenjem* *(integralom)* diferencijalne jednačine. Zadatak nalaženja rešenja diferencijalne jednačine obično se naziva *integrisanjem* diferencijalne jednačine.

U najjednostavnijem slučaju, kada je jednačina rešena po y' a desna strana jednačine ne sadrži y, diferencijalna jednačina dobija oblik

$$y' = f(x)$$

a njeno rešavanje predstavlja osnovni zadatak integralnog računa, odnosno nalaženje neodređenog integrala

$$y = \int f(x)dx + C$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Tako u ovom, najjednostavnijem slučaju postoji *familija rešenja* diferencijalne jednačine koja sadrži proizvoljnu konstantu C koja se naziva *integracionom konstantom.*

Međutim, i u opštem slučaju diferencijalne jednačine prvog reda postojaće familija rešenja koja sadrži proizvoljnu konstantu i koja ima opšti oblik

$$y = \varphi(x, C)$$

koji se naziva *opštim rešenjem (integralom)* diferencijalne jednačine prvog reda. Opšti integral može biti izražen i u implicitnom obliku

$$\phi(x, y, C) = 0$$

ali i u obliku rešenom po C

$$\omega(x, y) = C.$$

Za svaku konkretnu vrednost integracione konstante dobija se po jedno posebno rešenje diferencijalne jednačine. Svako od ovih pojedinačnih rešenja predstavlja jedno *partikularno rešenje* diferencijalne jednačine. Partikularno rešenje se iz opšteg rešenja može dobiti i postavljanjem *početnog uslova*, odnosno zadavanjem vrednosti x_0 i y_0 uz uslov $y_0 = y(x_0)$, posle čega se vrednost integracione konstante C izračunava iz jednačine $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

Grafik rešenja diferencijalne jednačine naziva se *integralnom krivom.* Opštem rešenju diferencijalne jednačine odgovara beskonačna familija integralnih krivih. Postavljanje početnog uslova odgovara zahtevu da se iz ove familije izdvoji integralna kriva koja prolazi kroz tačku $M(x_0, y_0)$.

9.1 Jednačina koja razdvaja promenljive

Ako se u diferencijalnoj jednačini $y' = f(x,y)$ funkcija $f(x,y)$ može predstaviti kao proizvod dveju funkcija od kojih jedna zavisi samo od x a druga samo od y

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

onda se takva jednačina

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

naziva *diferencijalnom jednačinom koja razdvaja promenljive.* Ovaj tip jednačina može se rešiti razdvajanjem promenljivih x i y na sledeći način

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

posle čega se integracijom leve i desne strane dobija

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Primer 79 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$y' + 2xy^2 = 0.$$

Radi se od jednačini koja razdvaja promenljive

$$y' = -2xy^2$$

pa se razdvajanjem promenljivih dobija

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$-\frac{dy}{y^2} = 2xdx$$

a zatim integracijom leve i desne strane

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx + C$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + C$$

i konačno

$$y = \frac{1}{x^2 + C}.$$

9.2 Homogena jednačina

Funkcija $f(x,y)$ koja zavisi od odnosa $\frac{y}{x}$

$$f(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

naziva se *homogenom funkcijom.* Diferencijalna jednačina $y' = f(x,y)$ u kojoj je funkcija $f(x,y)$ homogena

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

predstavlja *homogenu diferencijalnu jednačinu.*

Ovaj tip jednačina svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive uvođenjem smene

$$u = \frac{y}{x}$$

odnosno

$$y = ux$$

odakle se diferenciranjem leve i desne strane, vodeći pri tome računa da je x nezavisno promenljiva a y funkcija, dobija

$$y' = u'x + u.$$

Sada se polazna jednačina može transformisati u jednačinu

$$u'x + u = f(u)$$

a zatim

$$u'x = f(u) - u$$

odnosno

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Razmotrimo najpre slučaj kada je $f(u) - u = 0$ odnosno $f(u) = u$. Tada je polazna jednačina zapravo

$$y' = \frac{y}{x}$$

što predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive x i y, koja se jednostavno rešava razdvajanjem ove dve promenljive.

Ako je, međutim, $f(u) - u \neq 0$ onda jednačina

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive x i u

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

odnosno

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$$

posle čega se može pristupiti integraciji leve i desne strane. Napomenimo da je u ovom slučaju pri integraciji pogodnije umesto integracione konstante C koristiti $ln|C|$. Time se ne gubi na opštosti budući da $\ln|C|$ uzima sve vrednosti u intervalu $(-\infty, +\infty)$, dok se rezultat integracije može prikazati u jednostavnijem obliku.

Integracijom leve i desne strane dobijamo

$$\ln|x| + \ln|C| = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

odnosno, ako se uvede oznaka

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \varphi(u)$$

i primeni osobina logaritama da je zbir logaritama jednak logaritmu proizvoda, sledi

$$\ln|Cx| = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

i konačno

$$Cx = e^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Primer 80 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Deljenjem imenioca i broioca racionalnog izraza na desnoj strani sa x^2 dobijamo

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - (\frac{y}{x})^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

što predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu.

Uvođenjem smene

$$u = \frac{y}{x}$$

diferenciranjem leve i desne strane a potom množenjem sa x^2 dobija se

$$u'x + u = y'$$

pa diferencijalna jednačina postaje

$$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2}$$

odakle je

$$u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u - u + u^3}{1-u^2} = \frac{u+u^3}{1-u^2} = u\frac{1+u^2}{1-u^2}$$

odnosno

$$du\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{dx}{x}$$

Integrisanjem leve i desne strane dobijamo

$$\ln|C| + \int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \ln|x|.$$

Lako se može pokazati da je

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}$$

pa je odatle

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{1}{u}du - \int \frac{2u}{1+u^2}du = \ln|u| - \ln|1+u^2| = \ln\left|\frac{u}{1+u^2}\right|.$$

Konačan rezultat integracije je stoga

$$\ln|C| + \ln\left|\frac{u}{1+u^2}\right| = \ln|x|$$

odnosno

$$\ln\left|C\frac{u}{1+u^2}\right| = \ln|x|$$

posle čega se oslobađanjem od logaritama dobija

$$C\frac{u}{1+u^2} = x$$

odnosno

$$C\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = x$$

a zatim

$$C\frac{xy}{x^2+y^2}=x$$

i konačno

$$Cy=x^2+y^2$$

odnosno

$$x^2+y^2-Cy=0$$

što predstavlja familiju krugova sa centrom na y osi koji prolaze kroz koordinatni početak.

9.3 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

Jednačina oblika

$$A(x)y'+B(x)y+C(x)=0$$

koja, deljenjem sa $A(x)\not\equiv 0$, postaje

$$y'+P(x)y+Q(x)=0$$

naziva se *linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda.*

Ukoliko je funkcija $Q(x)\equiv 0$ linearna diferencijalna jednačina se naziva *homogenom.* Napomenimo da homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda treba razlikovati od homogene diferencijalne jednačine o kojoj je bilo reči u prethodnom odeljku.

Rešavanje linearne diferencijalne jednačine prvog reda započećemo rešavanjem njenog homogenog oblika

$$y'+P(x)y=0$$

koji zapravo predstavlja jednačinu koja razdvaja promenljive

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

pa se integracijom leve i desne strane dobija

$$\ln|y|=\ln|C|-\int P(x)dx$$

što se može predstaviti i u obliku

$$\ln|y|=\ln|C|+\ln\left|e^{-\int P(x)dx}\right|$$

odnosno

$$\ln|y|=\ln\left|Ce^{-\int P(x)dx}\right|$$

i konačno

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Polazeći od ovog rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine potražićemo rešenje nehomogenog oblika ove jednačine Lagranžovom metodom varijacije konstante. Naime, pretpostavićemo da se i rešenje nehomogene jednačine može naći u obliku

$$y = ue^{-\int P(x)dx}$$

s tim što u ovde nije konstanta, već promenljiva, odnosno funkcija od x.

Polazeći od ove pretpostavke, diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$$y' = u'e^{-\int P(x)dx} - uP(x)e^{-\int P(x)dx}$$

a potom zamenom y i y' u polaznoj diferencijalnoj jednačini

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0$$

sledi

$$u'e^{-\int P(x)dx} - uP(x)e^{-\int P(x)dx} + uP(x)e^{-\int P(x)dx} + Q(x) = 0$$

a zatim

$$u'e^{-\int P(x)dx} + Q(x) = 0$$

odakle je

$$u' = -Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

pa je

$$u = C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

i konačno

$$y = e^{-\int P(x)dx}[C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx].$$

Primer 81 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x.$$

Transformišući ovu jednačinu dobijamo

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x}y - \cos x = 0$$

dakle

$$P(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \qquad Q(x) = -\cos x$$

pa je

$$\int P(x)dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \ln\cos x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x$$

i dalje

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = -\int \cos x\cos x dx = -\int \cos^2 x dx =$$

$$-\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = -\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

tako da je konačno rešenje

$$y = e^{-\ln\cos x}\left(C + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right) = \frac{1}{\cos x}\left(C + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right).$$

9.4 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Kao uopštenje linearne diferencijalne jednačine javlja se *Bernulijeva diferencijalna jednačina* u obliku

$$y' + P(x)y + Q(x)y^m = 0$$

pri čemu se pretpostavlja da je $m \neq 0$ i $m \neq 1$. Naime, za $m = 0$ gornja jednačina predstavlja nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu, dok za $m = 1$ predstavlja homogenu linearnu jednačinu

$$y' + P(x)y + Q(x)y = y' + [P(x) + Q(x)]y = y' + P_1(x)y = 0.$$

Ako se Bernulijeva jednačina podeli sa y^m dobija se jednačina

$$\frac{1}{y^m}y' + P(x)\frac{1}{y^{m-1}} + Q(x) = 0.$$

Uvođenjem nove nepoznate funkcije

$$z = \frac{1}{y^{m-1}} = y^{-(m-1)}$$

i diferenciranjem leve i desne strane

$$z' = -(m-1)y^{-m}y' = -(m-1)\frac{1}{y^m}y'$$

a zatim smenom u jednačinu dobijamo

$$-\frac{1}{m-1}z' + P(x)z + Q(x) = 0$$

odnosno posle množenja sa $-(m-1)$

$$z' - (m-1)P(x)z - (m-1)Q(x) = 0$$

što predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z' + P_1(x)z + Q_1(x) = 0$$

gde je $P_1(x) = -(m-1)P(x)$ a $Q_1(x) = -(m-1)Q(x)$. Jednačina se dalje rešava kao linearna diferencijalna jednačina po nepoznatoj funkciji z i posle rešavanja dobija i nepoznata funkcija

$$y = z^{-\frac{1}{m-1}}.$$

Primer 82 *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Deljenjem leve i desne strane sa $x\sqrt{y}$ *dobija se*

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

posle čega se uvodi smena

$$z = \sqrt{y} \qquad z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$$

i jednačina postaje

$$2z' - \frac{4}{x}z = x$$

odnosno

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Za ovu linearnu diferencijalnu jednačinu je

$$\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x} = -2\ln x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

pa je dalje

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = -\int \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\ln x$$

tako da je

$$z = e^{-\int P(x)dx}(C + \frac{1}{2}\ln x) = x^2(C + \frac{1}{2}\ln x)$$

dok je

$$y = z^2 = x^4(C + \frac{1}{2}\ln x)^2.$$

9.5 Jednačina sa totalnim diferencijalom

Ako je data diferencijalna jednačina

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

i ako je pri tome ispunjen uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

tada gornja jednačina predstavlja *jednačinu sa totalnim diferencijalom.*

Naime, leva strana jednačine, uz navedeni uslov, predstavlja totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$

$$du = Pdx + Qdy$$

pri čemu je $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ a $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Opšti integral jednačine je prema tome

$$u(x,y) = C.$$

Kako je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P$$

to se integracijom leve i desne strane po x dobija

$$u = \int Pdx + \varphi(y)$$

gde je $\varphi(y)$ funkcija koju treba odrediti.

Ako sad diferenciramo ovaj izraz po y dobićemo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P dx + \frac{d\varphi}{dy}.$$

Kako je, pri tome,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

to jednačina postaje

$$Q = \frac{\partial}{\partial y}\int P dx + \frac{d\varphi}{dy}$$

odakle je

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx$$

pa se sad integracijom po y dobija

$$\varphi = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx \right] dy$$

i konačno opšti integral jednačine sa totalnim diferencijalom

$$u = \int P dx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx \right] dy = C.$$

Primer 83 *Naći opšti integral jednačine sa totalnim diferencijalom*

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Proverimo najpre da li je ispunjen uslov za jednačinu sa totalnim diferencijalom.

$$P = \frac{2x}{y^3} \qquad Q = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Kako je uslov ispunjen, pristupamo najpre integraciji P po x

$$\int P dx = \int \frac{2x}{y^3}dx = \frac{x^2}{y^3}$$

a zatim dobijeni rezultat diferenciramo po y

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P dx = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = -\frac{3x^2}{y^4}.$$

Sada ćemo potražiti funkciju φ integracijom izraza $\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx\right]$ *po* y

$$\int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx\right]dy = \int\left[\frac{y^2-3x^2}{y^4} + \frac{3x^2}{y^4}\right]dy = \int\frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}$$

tako da opšte rešenje diferencijalne jednačine glasi

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

Integracioni množitelj

Kada diferencijalna jednačina

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

ne ispunjava uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

onda jednačina ne predstavlja jednačinu sa totalnim diferencijalom.

Međutim , u pojedinim slučajevima moguće je naći funkciju $\lambda(x,y)$ takvu da posle množenja jednačine sa λ dobijemo jednačinu sa totalnim defierencijalom, naime da bude ispunjen uslov

$$\frac{\partial}{\partial y}(P\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\lambda)$$

Funkcija λ se u tom slučaju naziva *integracionim množiteljem.*

Integracioni množitelj se obično određuje kada je unapred poznat oblik funkcije λ, na primer

$$\lambda = \lambda(x), \lambda = \lambda(y), \lambda = \lambda(xy), \lambda = \lambda(x+y), \lambda = \lambda(x^2+y^2), \text{ itd.}$$

Primer 84 *Pokazati da jednačina*

$$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$$

ima integracioni množitelj oblika $\lambda = \lambda(xy)$ *i rešiti je.*

Najpre ćemo proveriti da li je ispunjen uslov za jednačinu sa totalnim diferencijalom.

$$P = xy^2 \qquad Q = x^2y - x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 1$$

Uslov dakle nije ispunjen, pa ćemo potražiti integracioni množitelj oblika $\lambda(xy)$*. U tom cilju najpre ćemo pomnožiti jednačinu ovom funkcijom*

$$xy^2\lambda(xy)dx + (x^2y - x)\lambda(xy)dy = 0$$

a zatim iskoristiti uslov

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[xy^2\lambda(xy)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2y - x)\lambda(xy)\right].$$

Odavde se dobija

$$2xy\lambda(xy) + xy^2x\lambda'(xy) = (2xy - 1)\lambda(xy) + (x^2y - x)y\lambda'(xy)$$

a potom sređivanjem ove jednačine

$$-\lambda(xy) - xy\lambda'(xy) = 0$$

i dalje

$$\frac{\lambda'(xy)}{\lambda(xy)} = -\frac{1}{xy}.$$

Posle uvođenja smene $xy = u$ *dobijamo*

$$\frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)} = -\frac{1}{u}$$

a zatim integracijom leve i desne strane

$$\ln\lambda(u) = -\ln u = \ln\frac{1}{u}$$

pa je odatle

$$\lambda(u) = \frac{1}{u}$$

odnosno

$$\lambda(xy) = \frac{1}{xy}.$$

Pokažimo da se zaista radi o integracionom množitelju. U tom cilju pomnožićemo polaznu jednačinu ovom funkcijom

$$\frac{xy^2}{xy}dx + \frac{x^2y - x}{xy}dy = 0$$

odakle dobijamo jednačinu

$$ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

Ispitajmo da li jednačina sada zadovoljava uslov za jednačinu sa totalnim diferencijalom

$$P = y \qquad Q = x - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Pošto je uslov zadovoljen pristupićemo integrisanju funkcije P po x

$$\int P dx = \int y dx = xy$$

a zatim diferenciranju dobijenog rezultata po y

$$\frac{\partial}{\partial y} \int P dx = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

i konačno integraciji po y

$$\int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx\right] dy = \int \left(x - \frac{1}{y} - x\right) dy = -\int \frac{1}{y} = -\ln y$$

tako da je opšte rešenje jednačine jednako

$$xy - \ln y = C.$$

9.6 Diferencijalne jednačine višeg reda

Opšti oblik obične diferencijalne jendačine n-tog reda je

$$\phi(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

odnosno ako je jednačina rešena po $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Ako funkcija $\varphi(x)$, koja ima neprekidne izvode do n-tog reda, zajedno sa svojim izvodima zadovoljava diferencijalnu jednčinu, odnosno ukoliko jednačina postaje identitet kada se y i izvodi od y u jednačini zamene sa $\varphi(x)$ i izvodima $\varphi(x)$ onda se funkcija $\varphi(x)$ naziva *rešenjem* diferencijalne jednačine, a sam zadatak nalaženja funkcije φ *integrisanjem* diferencijalne jednačine.

Kao i u slučaju diferencijalne jednačine prvog reda, *opšte rešenje* diferencijalne jednačine n-tog reda predstavlja jednu familiju funkcija, s tim što se sa redom jednačine povećava i broj integracionih konstanti, tako da opšte rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda ima oblik

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

ili oblik

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

što znači da zavisi od n proizvoljnih konstanti.

Takođe, analogno jednačini prvog reda, i za diferencijalnu jednačinu n-tog reda se mogu postaviti *početni uslovi*, koji se sastoje od zadane vrednosti funkcije y_0 u tački x_0, ali i vrednosti svih njenih izvoda zaključno sa izvodom $(n-1)$-og reda u toj istoj tački:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Izbor konkretnih brojnih vrednosti za $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ u početnim uslovima po pravilu dovodi do sistema od n jednačina sa n nepoznatih čijim rešavanjem se dobijaju vrednosti konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ koje daju odgovarajuće *partikularno rešenje* jednačine n-tog reda koje zadovoljava postavljene početne uslove.

9.6.1 Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

Jednačina

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

gde su $a_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ proizvoljne funkcije od x ili konstante naziva se *linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda.* Ako je $f(x) \equiv 0$ jednačina se naziva *homogenom* a u protivnom je *nehomogena.*

Ako sada uvedemo oznaku $L(y)$ za linearni operator

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y$$

onda se linearna diferencijalna lednačina može napisati kao

$$L(y) = f(x)$$

ukoliko je nehomogena, odnosno

$$L(y) = 0$$

ako je homogena.

Navedimo sada neke osobine linearnog operatora.

Kako za proizvoljnu funkciju y i proizvoljnu konstantu C važi

$$(Cy)^{(k)} = Cy^{(k)}$$

to je

$$L(Cy) = (Cy)^{(n)} + (a_1Cy)^{(n-1)} + (a_2Cy)^{(n-2)} + \ldots + (a_{n-1}Cy)' + a_nCy =$$
$$Cy^{(n)} + a_1Cy^{(n-1)} + a_2Cy^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}Cy' + a_nCy =$$
$$C(y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny) = CL(y).$$

Kako za proizvoljne funkcije y_1 i y_2 važi

$$(y_1 + y_2)^{(k)} = y_1^{(k)} + y_2^{(k)}$$

to je

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Iz prethodne dve osobine operatora $L(y)$ sledi da je za proizvoljne funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_k$:

$$L(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + \ldots + C_kL(y_k).$$

Posmatrajmo sada homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

koja se, kao što smo videli, može napisati u obliku

$$L(y) = 0.$$

Ako je y_1 partikularno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine, naime, ako je

$$L(y_1) = 0$$

onda je i C_1y_1 partikularno rešenje, jer je

$$L(C_1y_1) = C_1L(y_1) = 0.$$

Takođe, ako su y_1 i y_2 dva partikularna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine, onda je i $y_1 + y_2$ partikularno rešenje te jednačine, jer je

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0.$$

Prema tome, ako su $y_1, y_2, \ldots, y_k$ partikularna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine, onda je i $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ky_k$, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ proizvoljne konstante, takođe partikularno rešenje te jednačine.

Za funkcije $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ definisane u intervalu $[a, b]$ kažemo da su *linearno zavisne* u tom intervalu, ako postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ od kojih bar jedna nije jednaka 0, tako da za svako $x \in [a, b]$ važi

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) = 0.$$

Ako ne postoje takve konstante, odnosno ako je gornja jednakost ispunjena samo ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, onda su funkcije $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ *linearno nezavisne.*

Primer 85 *Funkcije*

$$\varphi_1(x) = \cos 2x \qquad \varphi_2(x) = \cos^2 x \qquad \varphi_3(x) = \sin^2 x$$

su linearno zavisne, jer je za $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1$

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \alpha_3\varphi_3 = \cos 2x - cos^2x + sin^2x \equiv 0.$$

Funkcije

$$\varphi_1(x) = e^x \qquad \varphi_2(x) = \cos^2 x \qquad \varphi_3(x) = \sin^2 x$$

su linearno nezavisne, jer je

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x \equiv 0$$

samo ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Svaki skup od n linearno nezavisnih partikularnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine naziva se *fundamentalnim (osnovnim) sistemom rešenja.* Postoji beskonačno mnogo fundamentalnih sistema rešenja.

Ako je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fundamentalni sistem rešenja, onda je opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine dato izrazom

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

Primer 86 *Homogena linearna diferencijalna jednačina*

$$y'' - 4y = 0$$

ima partikularna rešenja $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-2x}$, *koja čine fundamentalni sistem rešenja jer je*

$$\alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{-2x} = 0$$

samo ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *što znači da su funkcije* e^{2x} *i* e^{-2x} *linearno nezavisne. Prema tome, opšte rešenje polazne jednačine je*

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Ako bismo, na primer, želeli da iz ovog rešenja nađemo partikularno rešenje koje zadovoljava početne uslove $y(0) = 1, y'(0) = 0$ *onda bismo konstante* C_1 *i* C_2 *odredili na sledeći način. Iz opšteg rešenja za* $x = 0$ *dobijamo*

$$1 = C_1 + C_2$$

Diferencirajući levu i desnu stranu opšteg rešenja dobijamo

$$y_h' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}$$

pa za $y'(0) = 0$ *sledi*

$$0 = 2C_1 - 2C_2.$$

Rešavajući gornje dve jednačine po C_1 *i* C_2 *dobijamo*

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

pa je partikularno rešenje koje zadovoljava postavljene početne uslove jednako

$$y_p = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

Ako je poznato jedno partikularno rešenje Y nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L(y) = f(x)$$

onda ako uvedemo smenu $y = Y + z$ u gornju jednačinu dobijamo

$$L(Y + z) = f(x)$$

odnosno, na osnovu osobina linearnog operatora L

$$L(Y) + L(z) = f(x).$$

No, kako je Y partikularno rešenje nehomogene jednačine to je $L(Y) = f(x)$ pa jednačina postaje

$$L(z) = 0.$$

Prema tome, z predstavlja rešenje odgovarajuće homogene jednačine, pa se rešavanje negomogene linearne diferencijalne jednačine svodi na iznalaženje jednog partikularnog rešenja te jednačine Y i fundamentalnog sistema rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ odgovarajuće homogene jednačine. Opšte rešenje nehomogene jednačine je tada

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + Y.$$

Partikularno rešenje koje zadovoljava početne uslove

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

se može dobiti određivanjem konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ iz jednog sistema od n linearnih jednačina koji će se dobiti diferenciranjem opšteg rešenja $n-1$ put i smenom konstanti iz početnih uslova u opšte rešenje i ovih $n-1$ izvoda.

Primer 87 *Jednačina*

$$y'' + y = x$$

ima partikularno rešenje $Y = x$. *Odgovarajuća homogena jednačina*

$$y'' + y = 0$$

ima partikularna rešenja $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$ *koja su linearno nezavisna, tako da je opšte rešenje homogene jednačine*

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

dok je opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$$

Ako želimo, na primer, partikularno rešenje nehomogene jednačine koje će zadovoljavati početne uslove $y(0) = 1, y'(0) = 0$, *onda ćemo konstante* C_1 *i* C_2 *odrediti tako što ćemo najpe iz opšteg rešenja za* $x = 0$ *dobiti*

$$1 = C_2.$$

Diferenciranjem opšteg rešenja dobijamo

$$y = C_1 \cos x - C_2 \sin x + 1$$

a potom iz početnih uslova za $x = 0$

$$0 = C_1 + 1$$

odakle je $C_1 = -1$ *pa je traženo partikularno rešenje*

$$y = -\sin x + \cos x + x.$$

Ako funkcija $f(x)$, koja se naziva i *nezavisnim članom* nehomogene diferencijalne jednačine

$$L(y) = f(x)$$

predstavlja zbir k funkcija

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

onda je partikularno rešenje te jednačine zbir patikularnih rešenja k jednačina

$$L(y) = f_1(x), L(y) = f_2(x), \ldots, L(y) = f_k(x).$$

Naime, ako su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, redom, partikularna rešenja ovih k jednačina, onda je partikularno rešenje polazne jednačine

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k.$$

Primer 88 *Jednačina*

$$y'' + y = x + 2e^x$$

ima nezavisan član $f(x) = x + 2e^x$ *koji se može podeliti na*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

gde je $f_1(x) = x$ *a* $f_2(x) = e^x$. *Partikularno rešenje jednačine*

$$y'' + y = x$$

je $Y_1 = x$ *dok je partikularno rešenje jednačine*

$$y'' + y = 2e^x$$

jednako $Y_2 = e^x$, *pa je partikularno rešenje polazne jednačine*

$$Y = x + e^x$$

a njeno opšte rešenje

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x + e^x.$$

Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

Ako su u linearnoj diferencijalnoj jednačini

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

svi koeficijenti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realne konstante $a_i \in R, (i = 1, 2, \ldots, n)$, onda se jednačina naziva linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda sa *konstantnim koeficijentima.* Ukoliko je $f(x) \not\equiv 0$ jednačina je nehomogena, a ukoliko je $f(x) \equiv 0$ jednačina je homogena.

Partikularna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima se mogu uvek odrediti. Polazeći od rešenja homogene linearne diferencijalne jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima

$$y' + a_1 y = 0$$

dobijamo

$$\frac{y'}{y} = -a_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a_1 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a_1 dx \Rightarrow \ln y = -a_1 x$$

odakle je partikularno rešenje homogene jednačine prvog reda

$$y = e^{-a_1 x}.$$

Potražićemo i partikularno rešenje za homogenu jednčinu n-tog reda u obliku:

$$y = e^{rx}.$$

Diferenciranjem leve i desne strane dobijamo

$$y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Zamenom nepoznate funkcije y i njenih izvoda u jednačinu dobijamo

$$r^n e^{rx} + a_1 r^{(n-1)} e^{rx} + a_2 r^{(n-2)} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0$$

odnosno

$$e^{rx}(r^n + a_1 r^{(n-1)} + a_2 r^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} r + a_n) = 0.$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$ to se gornja jednačina svodi na

$$r^n + a_1 r^{(n-1)} + a_2 r^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

što predstavlja algebarsku jednačinu n-tog reda po r. Ova jednačina se naziva *karakterističnom jednačinom* linearne diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima. Fundamentalni sistem rešenja diferencijalne jednačine dobija se zavisno od rešenja njene karakteristične jednačine. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Ako karakteristična jednačina ima n realnih i međusobno različitih korena $r_1, r_2, \ldots, r_n$, onda fundamentalni sistem rešenja čine funkcije

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$$

pa je opšte rešenje homogene jednačine jednako

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

2. Ako karakteristična jednačina ima višestruk realni korena r reda s, onda tom korenu u fundamentalnom sistemu rešenja odgovara s partikularnih rešenja

$$y_1 = e^{rx}, y_2 = xe^{rx}, \ldots, y_s = x^{s-1}e^{rx}$$

koji se u opštem rešenju homogene jednačine pojavljuju u obliku

$$C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} + \ldots + C_s x^{s-1} e^{rx} = e^{rx}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}) = e^{rx} P_{s-1}(x)$$

3. Ako karakteristična jednačina ima prost (jednostruk) par konjugovano-kompleksnih korena

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

onda tom paru u fundamentalnom sistemu rešenja odgovaraju dva partikularna rešenja

$$y_{11} = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{12} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

koja se u u opštem rešenju homogene jednačine pojavljuju u obliku

$$A e^{\alpha x} \sin \beta x + B e^{\alpha x} \cos \beta x$$

4. Ako karakteristična jednačina ima višestruk par konjugovano-kompleksnih korena

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

reda s onda tom paru u fundamentalnom sistemu rešenja odgovara $2s$ partikularnih rešenja

$$y_{11} = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{12} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_{21} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, y_{22} = xe^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$\vdots$$
$$y_{s1} = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{s2} = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

koja se u u opštem rešenju homogene jednačine pojavljuju u obliku

$$A_1e^{\alpha x}\sin\beta x + B_1e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2xe^{\alpha x}\sin\beta x + B_2xe^{\alpha x}\cos\beta x + \ldots$$
$$+A_sx^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x + B_sx^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$(A_1+A_2x+\ldots+A_sx^{s-1})e^{\alpha x}\sin\beta x+(B_1+B_2x+\ldots+B_sx^{s-1})e^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$e^{\alpha x}[P_{s-1}(x)\sin\beta x + Q_{s-1}(x)\cos\beta x]$$

Primer 89

1. *Jednačina*
$$y'' - 4y = 0$$
ima karakterističnu jednačinu
$$r^2 - 4 = 0$$
čiji su koreni
$$r_1 = 2, r_2 = -2$$
pa je njeno opšte rešenje
$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

2. *Jednačina*
$$y''' + y = 0$$
ima karakterističnu jednačinu
$$r^3 + 1 = 0$$
čiji su koreni
$$r_1 = -1, r_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, r_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
pa je njeno opšte rešenje
$$y = C_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

3. Jednačina

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

ima karakterističnu jednačinu

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

odosno

$$(r-1)^3 = 0$$

za koju je $r = 1$ trostruki koren. Opšte rešenje ove jednačine je, prema tome

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2).$$

4. Jednačina

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

ima karakterističnu jednačinu

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

odosno

$$(r^2+1)^2 = 0$$

za koju je $r_{1,2} = \pm i$ dvostruki par konjugovano kompleksnih korena. Opšte rešenje ove jednačine je, prema tome

$$y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + (C_3 x \sin x + C_4 x \cos x) =$$

$$(C_1 + C_3x)\sin x + (C_2 + C_4x)\cos x.$$

Opšti integral nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima za neke oblike nezavisnog člana

Partikularno rešenje Y nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$L(y) = f(x)$$

koje je, pored sistema fundamentalnih rešenja, odnosno opšteg rešenja homogene jednačine, neophodno da bi se dobilo opšte rešenje nehomogene jednačine, može se odrediti za neke specijalne oblike nezavisnog člana $f(x)$.

1. Nezavisni član $f(x)$ je polinom p-tog stepena

$$L(y) = P_p(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p$$

a) Ukoliko karakteristična jednačina nema realan koren $r = 0$, onda se partikularno rešenje traži takođe u obliku polinoma p-tog stepena

$$Y = Q_p(x) = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p$$

čiji koeficijenti se određuju iz sistema jednačina koji se dobija smenom polinoma $Q_p(x)$ i njegovih izvoda u diferencijalnu jednačinu i izjednačavanjem izraza uz odgovarajuće stepene sa leve i desne strane jednačine.

b) Ukoliko karakteristična jednačina ima realan koren $r = 0$ reda l, onda se partikularno rešenje traži u obliku nepotpunog polinoma stepena $p + l$

$$Y = x^lQ_p(x) = x^l(b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p)$$

čiji koeficijenti se određuju kao i u prethodnom slučaju.

2. Nezavisni član $f(x)$ je proizvod polinoma p-tog stepena i eksponencijalne funkcije

$$L(y) = P_p(x)e^{\alpha x} = (a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p)e^{\alpha x}$$

a) Ukoliko karakteristična jednačina nema realan koren $r = \alpha$, onda se partikularno rešenje traži takođe u obliku proizvoda polinoma p-tog stepena i eksponencijalne funkcije

$$Y = Q_p(x)e^{\alpha x} = (b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p)e^{\alpha x}$$

pri čemu se koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_p$ određuju iz sistema jednačina koji se dobija smenom funkcije $Q_p(x)e^{\alpha x}$ i njenih izvoda u diferencijalnu jednačinu i izjednačavanjem izraza uz odgovarajuće stepene sa leve i desne strane jednačine.

b) Ukoliko karakteristična jednačina ima realan koren $r = \alpha$ reda l, onda se partikularno rešenje traži u obliku

$$Y = x^lQ_p(x)e^{\alpha x} = x^l(b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p)e^{\alpha x}$$

pri čemu se koeficijenti $b_0, b_1, \ldots, b_p$ određuju kao i u prethodnom slučaju.

3. Nezavisni član $f(x)$ je proizvod polinoma i trigonometrijskih funkcija

$$L(y) = P_p(x)\sin\beta x + Q_q(x)\cos\beta x =$$

$$(a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p)\sin\beta x + (b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q)\cos\beta x$$

pri čemu polinomi mogu biti različitog stepena (jedan od njih može biti i identički jednak 0), ali obe trigonometrijske funkcije moraju imati isti argument (βx)

a) Ukoliko karakteristična jednačina nema konjugovano kompleksan par korena $r_{1,2} = \pm i\beta$, onda se partikularno rešenje traži takođe u obliku proizvoda polinoma i trigonometrijskih funkcija

$$Y = R_r(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x =$$

$$(c_0x^r + c_1x^{r-1} + \ldots + c_r)\sin\beta x + (d_0x^r + d_1x^{r-1} + \ldots + d_r)\cos\beta x$$

gde je $r = \max(p, q)$. Drugim rečima, oba polinoma u partikularnom rešenju imaju isti stepen, koji preuzimaju od polinoma većeg stepena u nezavisnom članu. To dalje znači, da i u slučaju da je u nezavisnom članu jedan od polinom identički jednak nuli, odnosno da nezavisni član sadrži samo jedan polinom, partikularno rešenje uvek sadrži oba polinoma. Koeficijenti $c_0, c_1, \ldots, c_r$ i $d_0, d_1, \ldots, d_r$ određuju se iz sistema jednačina koji se dobija smenom funkcije $R_r(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x$ i njenih izvoda u diferencijalnu jednačinu i izjednačavanjem izraza uz odgovarajuće stepene sa leve i desne strane jednačine.

b) Ukoliko karakteristična jednačina ima konjugovano kompleksan par korena $r_{1,2} = \pm i\beta$ reda l, onda se partikularno rešenje traži u obliku

$$Y = x^lR_r(x)\sin\beta x + x^lS_r(x)\cos\beta x =$$

$$x^l(c_0x^r + c_1x^{r-1} + \ldots + c_r)\sin\beta x + x^l(d_0x^r + d_1x^{r-1} + \ldots + d_r)\cos\beta x$$

pri čemu se koeficijenti $c_0, c_1, \ldots, c_r$ i $d_0, d_1, \ldots, d_r$ određuju kao i u prethodnom slučaju.

4. Nezavisni član $f(x)$ je proizvod eksponencijalne funkcije, polinoma i trigonometrijskih funkcija

$$L(y) = e^{\alpha x}[P_p(x)\sin\beta x + Q_q(x)\cos\beta x] =$$

$$e^{\alpha x}[(a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p)\sin\beta x + (b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q)\cos\beta x]$$

pri čemu polinomi, kao i u prethodnom slučaju, mogu biti različitog stepena, a jedan od njih i identički jednak 0, ali i ovde obe trigonometrijske funkcije moraju imati isti argument (βx)

a) Ukoliko karakteristična jednačina nema konjugovano kompleksan par korena $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, onda se partikularno rešenje traži takođe u obliku proizvoda eksponencijalne funkcije, polinoma i trigonometrijskih funkcija

$$Y = e^{\alpha x}[R_r(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x] =$$

$$e^{\alpha x}[(c_0x^r + c_1x^{r-1} + \ldots + c_r)\sin\beta x + (d_0x^r + d_1x^{r-1} + \ldots + d_r)\cos\beta x]$$

gde je ponovo $r = \max(p, q)$. Dakle, i ovde partikularno rešenje sadrži oba polinoma. Koeficijenti $c_0, c_1, \ldots, c_r$ i $d_0, d_1, \ldots, d_r$ određuju se iz sistema jednačina koji se dobija smenom funkcije $e^{\alpha x}[R_r(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x]$ i njenih izvoda u diferencijalnu jednačinu i izjednačavanjem izraza uz odgovarajuće stepene sa leve i desne strane jednačine.

b) Ukoliko karakteristična jednačina ima konjugovano kompleksan par korena $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ reda l, onda se partikularno rešenje traži u obliku

$$Y = x^l e^{\alpha x}[R_r(x)\sin\beta x + S_r(x)\cos\beta x] =$$

$$e^{\alpha x}x^l[(c_0x^r + c_1x^{r-1} + \ldots + c_r)\sin\beta x + (d_0x^r + d_1x^{r-1} + \ldots + d_r)\cos\beta x]$$

pri čemu se koeficijenti $c_0, c_1, \ldots, c_r$ i $d_0, d_1, \ldots, d_r$ određuju kao i u prethodnom slučaju.

Primer 90

1. *Data je jednačina*

$$y'' - y = x^2 + 1.$$

Karakteristična jednačina

$$r^2 - 1 = 0$$

ima dva realna rešenja $r = 1$ i $r = -1$, pa je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Partikularno rešenje polazne nehomogene jednačine traži se u obliku

$$Y = b_0x^2 + b_1x + b_2.$$

Diferenciranjem dobijamo

$$Y' = 2b_0x + b_1, \quad Y'' = 2b_0$$

i dalje smenom u polaznu jednačinu

$$2b_0 - (b_0x^2 + b_1x + b_2) = x^2 + 1$$

odnosno

$$-b_0x^2 - b_1x + 2b_0 - b_2 = x^2 + 1$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobija

$$-b_0 = 1, \quad -b_1 = 0, \quad 2b_0 - b_2 = 1$$

odnosno

$$b_0 = -1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 3$$

pa je partikularno rešenje

$$Y = x^2 - 3$$

a opšte rešenje polazne nehomogene jednačine

$$y = y_h + Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 - 3.$$

2. Rešiti jednačinu

$$y''' + y' = x^4.$$

Karakteristična jednačina

$$r^3 + r = 0$$

ima rešenja $r = 0$ i $r = \pm i$, pa je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine

$$y_h = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x.$$

Pošto je nezavisni član polinom, a karakteristična jednačina ima (jednostruko) rešenje $r = 0$, partikularno rešenje polazne nehomogene jednačine potražićemo u obliku

$$Y = x(b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4) = b_0 x^5 + b_1 x^4 + b_2 x^3 + b_3 x^2 + b_4 x.$$

Diferenciranjem dobijamo

$$Y' = 5b_0 x^4 + 4b_1 x^3 + 3b_2 x^2 + 2b_3 x + b_4$$

$$Y'' = 20b_0 x^3 + 12b_1 x^2 + 6b_2 x + 2b_3$$

$$Y''' = 60b_0 x^2 + 24b_1 x + 6b_2$$

a zatim smenom u polaznu jednačinu

$$60b_0 x^2 + 24b_1 x + 6b_2 + 5b_0 x^4 + 4b_1 x^3 + 3b_2 x^2 + 2b_3 x + b_4 = x^4$$

odnosno

$$5b_0 x^4 + 4b_1 x^3 + (60b_0 + 3b_2)x^2 + (24b_1 + 2b_3)x + 6b_2 + b_4 = x^4$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene i rešavanjem rezultujućih jednačina dobija

$$b_0 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -4, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 24$$

pa je partikularno rešenje

$$Y = \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x$$

dok je opšte rešenje polazne jednačine

$$y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 24x.$$

3. *Naći rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$$

Karakteristična jednačina

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

ima dva realna rešenja $r = 1$ i $r = 2$, tako da je

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Partikularno rešenje jednačine traži se u obliku

$$Y = Ce^{3x}$$

odakle je

$$Y' = 3Ce^{3x}, \quad Y'' = 9Ce^{3x}$$

pa je dalje

$$9Ce^{3x} - 3 \cdot 3Ce^{3x} + 2Ce^{3x} = e^{3x}$$

odnosno

$$2Ce^{3x} = e^{3x} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

tako da je

$$Y = \frac{1}{2} e^{3x}$$

a opšte rešenje polazne jednačine

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

4. *Rešiti jednačinu*

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Kao i u prethodnom zadatku dobijamo

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Kako je jedan od korena karakteristične jednačine $r = 1$ *partikularno rešenje se traži u obliku*

$$Y = Cxe^x$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$Y' = Ce^x + Cxe^x, \quad Y'' = Ce^x + Ce^x + Cxe^x = 2Ce^x + Cxe^x.$$

Smena u jednačinu daje

$$2Ce^x + Cxe^x - 3(Ce^x + Cxe^x) + 2Cxe^x = e^x$$

odnosno

$$-Ce^x = e^x \Rightarrow C = -1$$

tako da je

$$Y = -xe^x$$

a opšte rešenje polazne jednačine

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x.$$

5. *Naći rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}.$$

Karakteristična jednačina

$$r^2 + r - 2 = 0$$

ima rešenja $r = 1$ *i* $r = -2$*, pa je*

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Partikularno rešenje tražimo u obliku

$$Y = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$Y' = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

$$Y'' = 2ae^{2x} + 2(2ax+b)e^{2x} + 2(2ax+b)e^{2x} + 2\cdot 2(ax^2+bx+c)e^{2x}.$$

Smena u jednačinu daje

$$2ae^{2x} + 4(2ax+b)e^{2x} + 4(ax^2+bx+c)e^{2x} +$$

$$(2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx+c)e^{2x} - 2(ax^2+bx+c)e^{2x} = (x^2-1)e^{2x}$$

odnosno

$$[4(ax^2+bx+c) + 5(2ax+b) + 2a]e^{2x} = (x^2-1)e^{2x}$$

odakle sledi jednakost polinoma

$$4(ax^2+bx+c) + 5(2ax+b) + 2a = x^2 - 1$$

odnosno

$$4ax^2 + (4b+10a)x + 4c + 5b + 2a = x^2 - 1.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene i rešavanjem rezultujućih jednačina dobijamo

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{5}{8}, \quad c = \frac{13}{32}$$

odakle je partikularno rešenje

$$Y = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}\right)e^{2x}$$

dok je opšte rešenje

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}\right)e^{2x}.$$

6. *Rešiti jednačinu*

$$y''' - y'' = xe^x.$$

Karakteristična jednačina ima realan koren $r = 1$ i dvostruki realan koren $r = 0$, pa sledi

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Zbog korena $r = 1$ partikularno rešenje se traži u obliku

$$Y = x(ax+b)e^x.$$

Diferenciranjem, a potom i sređivanjem rezultata diferenciranja dobijamo

$$Y' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$$
$$Y'' = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$$
$$Y''' = 6ae^x + 3(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x.$$

Smenom u diferencijalnu jednačinu i sređivanjem leve strane dobijamo

$$(2ax + b + 4a)e^x = xe^x$$

odakle sledi jednakost polinoma

$$2ax + b + 4a = x$$

iz koje se izjednačanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobija $a = \frac{1}{2}, b = -2$ *pa je*

$$Y = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) e^x$$

i konačno

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) e^x.$$

7. *Rešiti jednačinu*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + e^x + x^2$$

Karakteristična jednačina

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

ima rešenja $r = 1$ *i* $r = 2$, *pa je*

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Nezavisni član $f(x)$ *može se predstaviti kao zbir funkcija* $f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = e^x$ *i* $f_3(x) = x^2$, *pa se onda shodno tome partikularno rešenje traži u obliku*

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

gde su Y_1, Y_2 *i* Y_3 *partikularna rešenja diferencijalnih jednačina*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

respektivno.

Prve dve diferencijalne jednačine rešene su u prethodnim zadacima, pa ćemo iz njih preuzeti partikularna rešenja $Y_1 = \frac{1}{2}e^{3x}$ *i* $Y_2 = -xe^x$. *Za treću jednačinu potražićemo partikularno rešenje u obliku*

$$Y_3 = ax^2 + bx + c.$$

Diferenciranjem se dobija

$$Y_3' = 2ax + b, \quad Y_3'' = 2a$$

a zatim smenom u jednačinu

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

odnosno

$$2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = x^2$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene i rešavanjem rezultujućeg sistema linearnih jednačina dobija

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{7}{4}$$

odnosno

$$Y_3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

tako da je partikularno rešenje polazne jednačine

$$Y = \frac{1}{2}e^{3x} - xe^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

a njeno opšte rešenje

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} - xe^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$