2 Skupovi brojeva

2.1 Skup prirodnih brojeva

Skup N prirodnih brojeva čine brojevi 1,2,3,... Nad skupom prirodnih brojeva definisane su operacije sabiranja $(+)$ i množenja $(\cdot)$, čiji je rezultat takođe prirodan broj. Za dva prirodna broja $m, n \in N$ važi

$$m + n \in N \quad m \cdot n \in N$$

Ovo znači da je skup N zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja. Za tri broja $m, n, k \in N$ važi

- $(m + n) + k = m + (n + k)$ - asocijativnost sabiranja
- $m + n = n + m$ - komutativnost sabiranja
- $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$ - asocijativnost množenja
- $m \cdot n = n \cdot m$ - komutativnost množenja
- $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ - postoji neutralni element za množenje
- $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ - distributivnost množenja u odnosu na sabiranje

Skup prirodnih brojeva može se uvesti i aksiomatski, na osnovu Peanovih aksioma, a polazeći od pojmova *broj 1* i *sledbenik* n' *broja* n:

1. Broj $1 \in N$.
2. Za svako $n \in N$ postoji sledbenik $n' \in N$ koji sledi za njim.
3. Broj jedan nije sledbenik nijednog prirodnog broja.
4. Za svako $m, n \in N$ važi $m = n \Leftrightarrow m' = n'$.
5. Ako je $N_1 \subset N$ i ako N_1 zadovoljava aksiome 1 i 2, onda je $N_1 = N$ (aksioma indukcije).

2.1.1 Princip matematičke indukcije

Neka je I (otvoreni) iskaz koji zavisi od prirodnog broja n. Ako je ispunjeno:

1. iskaz je tačan za prirodan broj 1,
2. iz pretpostavke da je iskaz tačan za neki prirodan broj k, sledi da je iskaz tačan i za prirodan broj $k+1$,

tada je iskaz I tačan za svaki prirodan broj.

Princip matematičke indukcije sledi iz aksiome indukcije. Ako je N_1 skup svih prirodnih brojeva za koje važi iskaz I, tada prema uslovu 1 sledi $1 \in N_1$, a prema uslovu 2 sledi $k \in N_1 \Rightarrow k+1 \in N_1$ što znači da N_1 zadovoljava Peanove aksiome 1 i 2, pa je $N_1 = N$.

Primer 18 *Dokazati pomoću principa matematičke indukcije da za svako $n \in N$ važi*
a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
b) $n! \geq 2^{n-1}$

a)
$n = 1$
$1^3 = \frac{1}{4}(1+1)^2$

$n = k$
$1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$

$n = k+1$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3$
$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4(k+1)) = \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)$
$= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 = \frac{1}{4}(k+1)^2((k+1)+1)^2$

b)
$n = 1$
$1! \geq 2^0 = 1$

$n = k$
$k! \geq 2^{k-1}$

$n = k+1$
$(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1}$
$\geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{(k+1)-1}$

2.2 Skup celih brojeva

Skup D celih brojeva čine brojevi $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$ Između skupova N i D važi relacija inkluzije $N \subset D$. Skup D je, kao i skup N, zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja, koje zadovoljavaju sve osobine kao i u skupu N. U skupu celih brojeva sabiranje zadovoljava i sledeće dodatne osobine:

- $k + 0 = 0 + k = k$ - postoji neutralni element za sabiranje
- $\forall k \in D \ \exists k^*$, takvo da je $k + k^* = 0$ - za svaki element k skupa celih brojeva postoji njemu inverzni element $k^* = -k$ u odnosu na sabiranje.

2.3 Skup racionalnih brojeva

Skup racionalnih brojeva čine razlomci $\frac{p}{q}$, pri čemu važi $p, q \in D$, p i q su uzajamno prosti (nemaju ni jedan zajednički faktor različit od 1) i $q \neq 0$.

Između skupova N,D i Q važi relacija inkluzije $N \subset D \subset Q$. Skup Q je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja, koje zadovoljavaju sve osobine kao i u skupu D. U skupu racionalnih brojeva množenje zadovoljava i sledeću dodatnu osobinu:

- $\forall (x \in Q \land x \neq 0) \ \exists x^*$ takvo da je $x \cdot x^* = 1$ - za svaki element x skupa racionalnih brojeva različit od 0 postoji njemu inverzni element $x^* = \frac{1}{x}$ u odnosu na množenje.

2.4 Skup realnih brojeva

Skup realnih brojeva R predstavlja uniju skupa racionalnih brojeva i *iracionalnih brojeva* (I), koji mogu biti *algebarski* i *transcedentni.* Dakle, $R = Q \cup I$, pri čemu je $Q \cap I = \emptyset$.

Iracionalni brojevi su *algebarski* ako se mogu dobiti kao koren (nula) polinoma čiji su koeficijenti *racionalni*, odnosno kao rešenje algebarske jednačine:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad a_i \in Q$$

Primer 19 *Kako je:*

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

sledi da je $x = \sqrt{2}$ *algebarski iracionalan broj.*

Pokažimo da je $\sqrt{2}$ *zaista iracionalan broj. Pretpostavimo suprotno, da je* $\sqrt{2}$ *racionalan broj, što znači da ga je moguće izraziti kao količnik dva* *uzajamno prosta cela broja p i q:* $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{2}q \Rightarrow p^2 = 2q^2$*. Odavde je očigledno da je* p^2 *deljivo sa 2, odnosno da je* p^2 *paran broj. No, ako je* p^2 *paran broj onda je i p paran broj, odnosno broj deljiv sa 2. Sledi da je onda* p^2 *deljivo sa 4. Kako je* $p^2 = 2q^2$*, sledi da je i* $2q^2$ *deljivo sa 4, odnosno da je* q^2 *deljivo sa 2. Stoga i q mora biti deljivo sa 2. Prema tome i p i q su deljivi sa 2 i stoga nisu uzajamno prosti, što je u kontradikciji sa polaznim pretpostavkama. Iz ovoga sledi da* $\sqrt{2}$ *nije racionalan broj, jer ga nije moguće izraziti kao količnik dva uzajamno prosta cela broja p i q.*

Iracionalni brojevi su *transcedentni* ako nisu koreni polinoma čiji su koeficijenti racionalni, kao što je npr. broj π koji predstavlja odnos između obima kruga i njegovog prečnika.

$$\pi = \frac{O}{2r}$$

Skup realnih brojeva, u kome važi relacija poretka (¡) zadovoljava *Dedekindovu aksiomu neprekidnosti*:

Ako je $A \subset R$ i $B \subset R$ i

1. $A \cup B = R$
2. $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$
3. $(\forall x, y)(x \in A \wedge y \in B \Rightarrow x < y)$

onda postoji ili $\max A$ ili $\min B$.

Kao posledica ove aksiome svaki podskup skupa R koji je ograničen odozgo ima sup a svaki podskup koji je ograničen odozdo ima inf.

Brojna osa (prava) je prava sa fiksiranim tačkama O i L, takvim da tački O odgovara realni broj 0, a tački L realni broj 1. Na ovaj način uspostavlja se obostrano jednoznačno preslikavanje između skupa realnih brojeva i skupa tačka na brojnoj osi. Duž $\overline{OL}$ je jedinica mere.

Otvoreni interval (a, b) čini skup svih realnih brojeva x takvih da je $a < x < b$.

Poluotvoreni interval $[a, b)$ odnosno $(a, b]$ čini skup svih realnih brojeva x tavih da je

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

Zatvoreni interval $[a, b]$ čini skup svih realnih brojeva x takvih da je $a \leq x \leq b$.

Apsolutna vrednost realnog broja a se označava sa $|a|$, a definiše sa

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Važi da je:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
- $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

2.5 Skup kompleksnih brojeva

Jednačina $x^2 = -1$ nema rešenja u skupu realnih brojeva. Međutim, ako se uvede *imaginarna jedinica* i takva da je $i^2 = -1$ onda se skup realnih brojeva može proširiti na skup *kompleksnih brojeva* čiji su elementi $z = x + iy$, gde su x i y realni brojevi, odnosno:

$$C = \{x + iy | x, y \in R\}$$

Realni deo kompleksnog broja $z = x + iy$ je $x = Re\ z$, a imaginarni deo je $y = Im\ z$. Za $y = 0$, $z = x$ predstavlja realan broj, a za $x = 0$, $z = iy$ je *čisto* imaginaran broj. Ako je $z_1 = x_1 + iy_1$, a $z_2 = x_2 + iy_2$, onda je

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Nad skupom kompleksnih brojeva definisane su sledeće operacije:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 - y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Za svaki kompleksan broj $z = x + iy$ postoji njemu *konjugovano kompleksan broj* $\overline{z} = x - iy$. Važi

$$Re\ z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad Im\ z = \frac{z - \overline{z}}{2i} \qquad z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

Kompleksni brojevi se mogu predstaviti u *kompleksnoj (Gausovoj) ravni* gde je x osa realna, a y osa imaginarna. Između skupa kompleksnih brojeva i skupa tačaka u Gausovoj ravni postoji obostrano jednoznačno preslikavanje. Svaka tačka u ravni jednoznačno je određena radijus vektorom koji spaja tu tačku sa koordinatnim početkom: dužinom ρ vektora i uglom ϕ koji vektor zaklapa sa x osom, pri čemu se obično uzima vrednost ugla u intervalu $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Tako se i kompleksan broj može predstaviti preko ρ i ϕ u *trigonometrijskom obliku*:

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

jer je $x = \rho\cos\phi$ i $y = \rho\sin\phi$. ρ je moduo (apsolutna vrednost) broja z i jednak je

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

ϕ je *argument* kompleksnog broja i jednak je

$$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = 0, y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ arctg\frac{y}{x} & x > 0 \\ arctg\frac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ arctg\frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

2.5.1 Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

Za kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku operacije množenja i deljenja date su sa:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku dato je formulama:

$$z^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}), k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Formule za z^n i $\sqrt[n]{z}$ nazivaju se *prvom i drugom Moavrovom formulom.* Iz druge Moavrove formule vidi se da je broj različitih n-tih korena svakog komplesnog broja tačno n.

Dokaz 1 *Dokažimo najpre formulu za proizvod dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku* $z_1 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ *i* $z_2 = \rho_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$*:*

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot\rho_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$$

$$\rho_1\rho_2[\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)] =$$
$$\rho_1\rho_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$$

Dokaz 2 *Dokažimo sada formulu za količnik dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)}{\rho_2(\cos\phi 2 + i\sin\phi 2)} =$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 - i\sin\phi_2)}{\cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_2} =$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 - \cos\phi_1\sin\phi_2)) =$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2))$$

Dokaz 3 *Prvu Moavrovu formulu*

$$z^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

dokazaćemo pomoću matematičke indukcije. Formula očigledno važi za $n = 1$*:*

$$n = 1: \quad z^1 = \rho^1(\cos 1\cdot\phi + i\sin 1\cdot\phi)$$

Pretpostavićemo sada da važi za $n = k$*:*

$$n = k: \quad z^k = \rho^k(\cos k\cdot\phi + i\sin k\cdot\phi)$$

U tom slučaju je za:

$$n = k+1: \quad z^{k+1} = z\cdot z^k = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)\rho^k(\cos k\cdot\phi + i\sin k\cdot\phi)$$
$$= \rho^{k+1}(\cos\phi\cos k\phi + i\sin\phi\cos k\phi + i\cos\phi\sin k\phi + i^2\sin\phi\sin k\phi)$$
$$= \rho^{k+1}[(\cos\phi\cos k\phi - \sin\phi\sin k\phi) + i(\sin\phi\cos k\phi + \cos\phi\sin k\phi)]$$
$$= \rho^{k+1}(\cos(\phi + k\phi) + i\sin(\phi + k\phi))$$
$$= \rho^{k+1}(\cos(k+1)\phi + i\sin(k+1)\phi)$$

Dokaz 4 *Dokaz druge Moavrove formule*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\phi + 2n\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2n\pi}{n})$$

je najsloženiji. Pretpostavimo da je: $\sqrt[n]{z} = \xi$ *gde je* $\xi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$*, odnosno:*

$$\sqrt[n]{z} = \xi \Leftrightarrow \xi^n = z$$

Sledi, dalje:

$$\sqrt[n]{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\rho(\cos\phi + i\sin\phi) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\rho = r^n \ \wedge \ \cos\phi = \cos n\theta \ \wedge \ \sin\phi = \sin n\theta$$

Odavde je sada:

$$r = \sqrt[n]{\rho} \ \wedge \ \cos n\theta - \cos\phi = 0 \ \wedge \ \sin n\theta - \sin\phi = 0$$

Primenom formula za razliku kosinusa odnosno razliku sinusa iz $\cos n\theta - \cos\phi = 0 \ \wedge \ \sin n\theta - \sin\phi = 0$ *se potom dobija:*

$$-2\sin\frac{n\theta - \phi}{2}\sin\frac{n\theta + \phi}{2} = 0 \ \wedge \ 2\sin\frac{n\theta - \phi}{2}\cos\frac{n\theta + \phi}{2} = 0$$

Pošto $\sin\frac{n\theta+\phi}{2}$ *i* $\cos\frac{n\theta+\phi}{2}$ *ne mogu istovremeno biti jednaki nuli, mora da važi*

$$\sin\frac{n\theta - \phi}{2} = 0$$

$$\frac{n\theta - \phi}{2} = k\pi$$

$$n\theta - \phi = 2k\pi$$

$$n\theta = \phi + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

(a) Pokžimo sada da se za svako $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ *dobija različit koren. Ako su* $0 \leq k_1 \leq n-1$ *i* $0 \leq k_2 \leq n-1$*, onda je za* $k_1 \neq k_2$

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\phi + 2k_1\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k_1\pi}{n}) \neq z_2 = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\phi + 2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k_2\pi}{n})$$

Ako pretpostavimo suprotno $k_1 \neq k_2$ i $z_1 = z_2$, sledi

$$\sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\phi+2k_1\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k_1\pi}{n}) = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\phi+2k_2\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k_2\pi}{n})$$

pa je

$$\cos\frac{\phi+2k_1\pi}{n} = \cos\frac{\phi+k_2\pi}{n} \ \wedge \ \sin\frac{\phi+2k_1\pi}{n} = \sin\frac{\phi+2k_2\pi}{n}$$

odnosno

$$\frac{\phi+2k_1\pi}{n} - \frac{\phi+2k_2\pi}{n} = 2k\pi$$
$$\phi+2k_1\pi-\phi-2k_2\pi = 2nk\pi$$
$$k_1 - k_2 = nk$$
$$k_1 = nk + k_2$$

što je u suprotnosti sa polaznim pretpostavkama $k_1 \neq k_2$, $0 \leq k_1 \leq n-1$ i $0 \leq k_2 \leq n-1$ jer je ili $k = 0$ što povlači $k_1 = k_2$ ili je $k \neq 0$ i $k_1 \geq n \vee k_1 < 0$.

(b) Konačno, pokažimo da $k < 0$ i $k \geq n$ ne daje nove korene. Naime, za svako $k < 0$ i $k \geq n$ može se naći $0 \leq k_1 \leq n-1$ takvo da je $k = k_1 + n \cdot k^*$. Odavde je:

$$cos\frac{\phi+2k\pi}{n} = \cos\frac{\phi+2(k_1+nk^*)\pi}{n} = \cos(\frac{\phi+2k_1\pi}{n}+2k^*\pi) = \cos\frac{\phi+2k_1\pi}{n}$$

$$\sin\frac{\phi+2k\pi}{n} = \sin\frac{\phi+2(k_1+nk^*)\pi}{n} = \sin\frac{\phi+2k_1\pi}{n}$$

pa sledi da su koreni za k i k_1 isti.

Svi koreni kompleksnog broja z imaju isti radijus vektor što znači da se u Gausovoj ravni svi nalaze na krugu sa centrom u koordinatnom početku. Argumenti im se razlikuju za isti ugao: $\frac{2\pi}{n}$, tako da tačke u kompleksnoj ravni koje predstavljaju korene broja z čine temena pravilnog mnogougla.

Primer 20 *Izračunajmo $\sqrt[4]{1}$.*

$$1 = (\cos 0 + i\sin 0)$$
$$\sqrt[4]{1} = 1(\cos\frac{0+2k\pi}{4}+i\sin\frac{0+2k\pi}{4}) \quad k = 0,1,2,3$$

$$k=0: \quad z_1=\cos 0+i\sin 0=1$$
$$k=1: \quad z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$
$$k=2: \quad z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$
$$k=3: \quad z_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

Primer 21

1. $(3+2i)(i+3)+(2-i)(i+1)=3i+2i^2+9+6i+2i-i^2+2-i=$ $i^2+10i+11=10+10i$
2. $\frac{i+1}{i-1}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$
3. *Naći moduo i argument sledećih kompleksnih brojeva:*
   (a) $z_1=-i \quad \rho_1=1 \ \phi_1=-\frac{\pi}{2}$
   (b) $z_2=3i \quad \rho_2=3 \ \phi_2=\frac{\pi}{2}$
   (c) $z_3=5 \quad \rho_3=5 \ \phi_3=0$
   (d) $z_4=-5 \quad \rho_4=5 \ \phi_4=\pi$
   (e) $z_5=1+i \quad \rho_5=\sqrt{2} \ \phi_5=arctg1=\frac{\pi}{4}$
   $z_5=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$
   (f) $z_6=1-i \quad \rho_6=\sqrt{2} \ \phi_6=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$
   $z_6=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$
   (g) $z_7=-1+i \quad \rho_7=\sqrt{2} \ \phi_7=arctg(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$
   $z_7=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$
   (h) $z_8=-1-i \quad \rho_8=\sqrt{2} \ \phi_8=arctg1-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$
   $z_8=\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4}))=\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4})$
4. $(1+i)^{10}=[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^{10}=(\sqrt{2})^{10}(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4})=$ $2^5(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2})=32(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=32i$
5. $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})$
   $k=0,1,2$
$$z_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$$
$$z_2=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12})=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$
$$z_3=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12})=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{-5\pi}{12}+i\sin\frac{-5\pi}{12})=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12})$$