Glava 1

Teorija polja

1.1 Vektorsko polje

1.1.1 Vektorska funkcija. Vektorsko polje

Neka se svakoj tački M, oblasti $\mathcal{D}$, po određenom zakonu, dodeli jedna vrednost nekog vektora $\mathbf{v}$, tada kažemo da je definisana vektorska funkcija $\mathbf{v}$=$\mathbf{v}(M)$. Skup $\mathcal{D}$, kome pripadaju vrednosti argumenta naziva se oblast definisanosti funkcije ili **vektorsko polje** ove funkcije. Dakle, vektorsko polje je oblast definisanosti vektorske funkcije.

Međutim, kako je svaka tačka M određena vektorom položaja $\mathbf{r}$, to prethodna definicija može da se da i u obliku:

> ako se svakoj vrednosti vektora položaja $\mathbf{r}\in\mathbb{V}$, gde je $\mathbb{V}$ trodimenzionalni vektorski prostor, čiji su bazni vektori $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, po određenom zakonu, dodeli jedna vrednost nekog vektora $\mathbf{v}$, kažemo da je definisana vektorska funkcija argumenta $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3. \tag{1.1}$$

Ovde smo vektor položaja izrazili preko komponenti, u odnosu na neki koordinatni sistem, pa tako predstavili i samu funkciju.

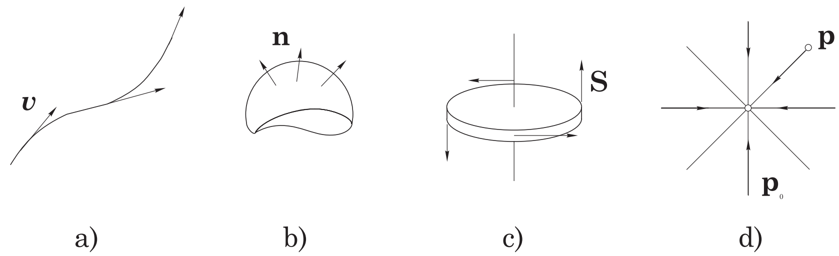
Kako je, u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem:

$$v_1 = v_1(x, y, z) \quad v_2 = v_2(x, y, z) \quad v_3 = v_3(x, y, z) \tag{1.2}$$

to svaka od ovih relacija definiše po jedno skalarno polje. Dakle, proučavanje vektorskih polja se svodi na proučavanje tri (ako je trodimenzioni prostor u kome posmatramo) skalarna polja.

Kao primere navedimo: *polje sile Zemljine teže, polje brzina pokretnog fluida, gradijent skalarne funkcije* itd. Kao primer možemo da uzmemo i bilo koju analitički zadatu vektorsku funkciju, kakva je na primer $\mathbf{v}$= $xy\mathbf{i}-2yz\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, čija oblast definisanosti predstavlja vektorsko polje.

Neki tipični primeri vektorskih polja prikazani su na slikama 2.7 a,b,c,d.

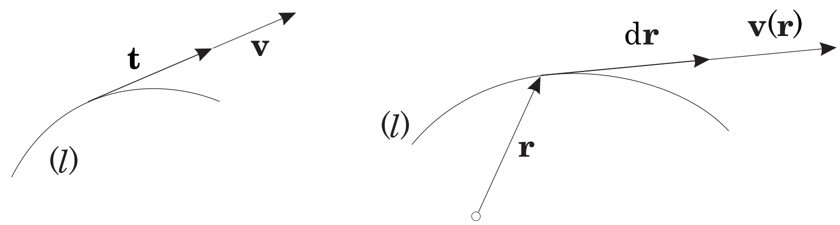


Slika 1.1:

Ako vektorsko polje ne zavisi od vremena zovemo ga stacionarno vektorsko polje.

Definicija.

Vektorskom linijom (linija sila) l naziva se geometrijsko mesto tačaka vektorskog polja u kojima vektorska funkcija $\mathbf{v}(M)$ ima pravac tangente na ovu liniju, u datim tačkama, tj. linija kod koje se u svakoj tački pravac vektora poklapa sa pravcem tangente krive u toj tački.



Slika 1.2:

Iz definicije vektorske linije, kako su vektor tangente $\mathbf{t}$ odnosno $\mathrm{d}\mathbf{r}$ i vektor $\mathbf{v}$ kolinearni, sledi jednačina ove linije:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0, \tag{1.3}$$

ili, na osnovu (1.28), u obliku (vidi sl. 1.2):

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}t, \quad \text{gde je } t \text{ parametar.} \tag{1.4}$$

U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu (1.4) postaje:

$$\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k} = (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \cdot \mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Kako su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ linearno nezavisni, iz poslednje relacije konačno dobijamo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_1} = \frac{\mathrm{d}y}{v_2} = \frac{\mathrm{d}z}{v_3} = \mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

Ova relacija predstavlja diferencijalnu jednačinu vektorske linije.

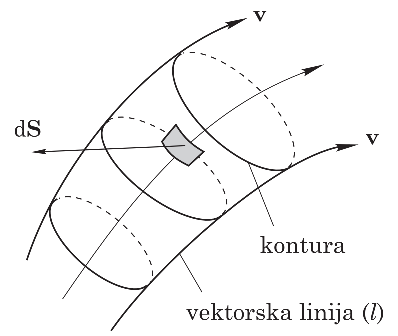
Izvod vektorske funkcije u pravcu slično se definiše kao izvod skalarne funkcije:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}s}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}s}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}s}\mathbf{k}, \tag{1.7}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial v_1}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\\
\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial v_2}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\\
\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial v_3}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

Uočimo u vektorskom polju $\mathbf{v}$ neku orijentisanu zatvorenu krivu, koju zovemo kontura. Kroz svaku tačku ove konture prolazi po jedna vektorska linija (l).



Slika 1.3:

> *Definicija.*
>
> Geometrijsko mesto vektorskih linija, koje prolaze kroz tačke jedne konture u vektorskom polju $\mathbf{v}$, predstavlja površ koja se naziva **solenoid** (tuba ili vektorska površ ili vektorska cev), vidi sl. 1.3.

Da bismo napisali jednačinu ove površi, označimo sa S površinu omotača ove cevi, a sa $\mathrm{d}\mathbf{S}$ vektorski element ove površi. Prema definiciji solenoida[1] sledi da je vektorski površinski element upravan na vektor $\mathbf{v}$, pa je:

$$\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0. \tag{1.9}$$

Pema tome, ako je S ukupna površina omotača, onda je:

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0. \tag{1.10}$$

1.1.2 Divergencija i rotor

Posmatrajmo diferencijabilnu vektorsku funkciju $\mathbf{v}$, koju možemo da predstavimo, u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem, u obliku:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \tag{1.11}$$

[1] Solenoid - od grčke reči $\sigma\omega\lambda\eta\nu$ - cev.

Definicija.

Skalarnu funkciju, određenu relacijom:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.12}$$

zovemo **divergencija** vektorske funkcije $\mathbf{v}$ ili divergencija vektorskog polja definisanog sa $\mathbf{v}$.

Pogodnija oznaka za divergenciju je već definisan nabla operator ∇, preko koga možemo da izrazimo divergenciju u obliku:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= \nabla\cdot\mathbf{v} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Teorema 1 *Vrednost* div$\mathbf{v}$ *zavisi samo od tačaka u prostoru (i naravno od vrednosti funkcije* $\mathbf{v}$*), ali ne i od izbora koordinatnog sistema.*

Napomenimo da je moguće definisati divergenciju tako da se vidi da ne zavisi od izbora koordinatnog sistema, što ćemo kasnije i uraditi.

Definicija.

Vektorska funkcija, definisana sa:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \tag{1.14}$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

zove se **rotor** vektorske funkcije $\mathbf{v}$ ili rotor vektorskog polja, definisanog funkcijom $\mathbf{v}$.

Teorema 2 *Intenzitet i pravac vektora* rot $\mathbf{v}$ *na zavisi od posebno izabranog Dekartovog koordinatnog sistema.*

Ovo tvrđenje dokazaćemo kasnije.

1.1.3 Klasifikacija vektorskih polja

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0, \tag{1.15}$$

zove se **potencijalno** ili bezvrtložno ili laminarno.

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \neq 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{1.16}$$

zove se solenoidno ili **vrtložno**.

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{1.17}$$

zove se **Laplasovo polje**.

Definicija.

Vektorsko polje u čijim je svim tačkama:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \neq 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} \neq 0, \tag{1.18}$$

zove se **složeno polje**.

Napomenimo da proučavanje složenog polja može da se svede na jedno potencijalno i jedno solenoidno. Napišimo neko složeno polje u obliku:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \tag{1.19}$$

tako da je:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 \neq 0, \tag{1.20}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_2 \neq 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 = 0. \tag{1.21}$$

Dalje, kako je:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \mathrm{div}\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 + \mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 = \mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 \neq 0, \tag{1.22}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_1 + \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_2 = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_2 \neq 0. \tag{1.23}$$

to smo dokazali prethodno tvrđenje.

1.1.4 Potencijal

Pretpostavimo da vektorsku funkciju $\mathbf{v}$ možemo da predstavimo kao gradijent neke skalarne funkcije položaja $\varphi(\mathbf{r})$, tj.:

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi. \tag{1.24}$$

Ovako određenu skalarnu funkciju φ zovemo **potencijal** vektorskog polja $\mathbf{v}$.

Teorema 3 *Polje vektorske funkcije* $\mathbf{v}=\mathrm{grad}\,\varphi$ *je potencijalno polje.*

Dokaz.

Kako je, po pretpostavci:

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{1.25}$$

to odavde sledi:
$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial y}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \tag{1.26}$$
Na sličan način dobijamo i:
$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \tag{1.27}$$
Na osnovu ovih relacija dobijamo da je rot $\mathbf{v}= 0$, jer je:
$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{v} &= \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Kako je, u opštem slučaju, i:
$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

to je teorema dokazana.

1.1.5 Primeri potencijala

Potencijal vektora položaja

Posmatrajmo vektorsko polje $\mathbf{v} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Kako je $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 1$ to odavde sledi da je div$\mathbf{v} = 3 \neq 0$.

Dalje, kako je
$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = 0, \tag{1.30}$$
to zaključujemo da je vektorsko polje $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ potencijalno.

Potencijal sile

Ako postoji takva skalarna funkcija U da sila $\mathbf{S}$ može da se predstavi u obliku:
$$\mathbf{S} = \operatorname{grad} U, \tag{1.31}$$
tada kažemo da je sila **konzervativna** i da postoji **potencijal sile** U. Na primer, posmatrajmo silu gravitacije:
$$\mathbf{S} = -\gamma\,\frac{m\cdot m_0}{R^2}\,\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \tag{1.32}$$
gde su: m i m_0 – mase koje se privlače, γ – gravitaciona konstanta, a $\mathbf{R}$ – vektor položaja jedne materijalne tačke u odnosu na drugu, R – intenzitet vektora položaja.

Potencijal ove sile dat je izrazom (videti (**??**)):
$$U = \gamma\frac{m_0}{R}. \tag{1.33}$$

Stacionarno elektrostatičko polje

U elektrodinamici problem određivanja jačina električnog i magnetnog polja može da se svede na određivanje potencijala. Pođimo od Maksvelovih[2] jednačina za elektromagnetno polje u vakuumu:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}\varrho, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_o\mathbf{j} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

gde su $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ i $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ – jačina električnog i indukcija magnetnog polja respektivno, ε_0 – dielektrična konstanta u vakuumu, μ_0 – magnetna permeabilnost (propustljivost) vakuuma, a $\varrho(x,y,z,t)$ i $\mathbf{j}(x,y,z,t)$ – gustina naelektrisanja i gustina struje, respektivno.

Pogledajmo drugu i treću jednačinu (koje se u literaturi nazivaju bezizvorne jednačine, jer u njima ne figurišu gustina naelektrisanja i gustina struje, koje karakterišu izvore polja). Pošto je divergencija rotora, ma kog vektora, identički jednaka nuli (1.36), možemo napisati da je

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) = 0,$$

gde je $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z,t)$. Kada to zamenimo u treću Maksvelovu jednačinu, dobijamo

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{*}$$

Kako je rotor gradijenta ma koje skalarne funkcije identički jednak nuli (1.34), veličine $\mathbf{E}$ i $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ mogu da se razlikuju za gradijent neke skalarne funkcije Φ, gde je $\Phi = \Phi(x,y,z,t)$. Tako je

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\Phi.$$

Vektorska funkcija $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ i skalarna funkcija $\Phi(x,y,z,t)$ zovu se **vektorski** i **skalarni potencijal**, respektivno.

Da bismo videli fizički smisao skalarnog potencijala, pretpostavimo da je elektromagnetno polje stacionarno, tj. da se ne menja tokom vremena. Tada je $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$=0, pa je

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\boldsymbol{\Phi}. \tag{**}$$

Skalarnim množenjem vektorom pomeraja d$\mathbf{r}$ dobijamo

$$\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{grad}\Phi\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z = -\mathrm{d}\Phi,$$

pa integracijom po nekom putu od beskonačnosti do tačke prostora u kojoj po-smatramo polje, dobijamo

$$\Phi(x,y,z) = -\int_{\infty}^{(x,y,z)} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Tako za stacionarno elektromagnetno polje skalarni potencijal predstavlja rad koji neka spoljašnja sila treba da izvrši nasuprot električnog polja da bi se jedinično naelektrisanje istog znaka kao i izvor polja dovelo iz beskonačnosti u posmatranu tačku (x,y,z). Uzima se da je vrednost skalarnog potencijala u beskonačnosti jednaka nuli.

Naravno, u slučaju vremenski promenljivog polja ovakav zaključak više ne važi.

[2]Maxwell James Clark (1831-1879), britanski fizičar. Istraživao je u mnogim oblastima fizike, a najznačajnija dela su iz elektromagnetskih pojava. Postavio je četiri jednačine u kojima je izložen princip po kome promene u električnom polju izazivaju promene u magnetskom polju i obrnuto. Formulisao je zakon raspodele brzine molekula u gasu. Smatra se jednim od osnivača kinetičke teorije gasova, uz L. Boltzmanna i R. Clausiusa.

Sam vektorski potencijal $\mathbf{A}(x,y,z)$ nema neposredni fizički smisao, dok njegov linijski integral po nekoj zatvorenoj konturi L ima. Naime, kako je

$$\int_L \mathbf{A}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

to je cirkulacija vektora vektorskog potencijala, po ma kakvoj zatvorenoj konturi, jednaka magnetnom fluksu kroz ma koju površ oivičenu tom konturom, što važi u najopštijem slučaju.

Kalibraciona ili gradijentna invarijantnost elektromagnetnog polja

Napomenimo da funkcije skalarnog i vektorskog potencijala za dato elektromagnetno polje nisu jednoznačne. To je posledica toga što se oni javljaju samo u obliku svojih izvoda, pa su određeni samo sa tačnošću do izraza koji se skraćuju pri operacijama u navedenim obrascima.

Za vežbu pokazati da se Maksvelove jednačine ne menjaju (invarijantne su) ako se $\mathbf{A}$ i Φ promene na sledeći način:

$$\Phi_o = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}; \quad \mathbf{A}_o = \mathbf{A} + \mathrm{grad} f,$$

gde je $f = f(x,y,z,t)$ neka funkcija promenljivih x, y, z, t.

Pošto Maksvelove jednačine određuju vrednosti $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ to znači da se za jedno elektromagnetno polje može definisati čitava familija vektorskih i skalarnih potencijala koji zadovoljavaju jednakosti (*) i (**). Najjednostavnije fizičko objašnjenje (uprošćeno za stacionarni slučaj) je primer elektrostatičkog polja gde nam gradijentna invarijantnost (nepromenljivost) daje slobodu da proizvoljno određujemo referentni nivo (nivo na kome je potencijalna energija jednaka nuli) u odnosu na koji računamo potencijalnu energiju i potencijal. To znači da se u definiciji potencijala ne mora uzeti da probno naelektrisanje dolazi iz beskonačnosti već iz neke tačke prostora koja tako postaje referentni (nulti) nivo. Bez obzira kako definišemo referentni nivo, jačina elektrostatičkog polja je nepromenjena.

$$\mathbf{E} = \mathrm{grad}(\Phi + \phi) = \mathrm{grad}\Phi \quad \phi = const.$$

Ovde je ϕ praktično potencijal našeg izabranog referentnog nivoa u odnosu na beskonačnost.

Jednačine elektromagnetnog potencijala

Posmatraćemo šta se dobija kada skalarni i vektorski potencijal elektromagnetnog polja uvrstimo u Maksvelove jednačine za vakuum, u kojima figurišu izvori polja (gustina struje $\mathbf{j}$ i gustina naelektrisanja ρ).

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{A} = \mu_o \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\varepsilon_o\mu_o,$$

$$-\Delta\mathbf{A} + \mathrm{graddiv}\mathbf{A} = \mu_o\mathbf{j} - \left(\mathrm{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right)\varepsilon_o\mu_o,$$

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_o\mathbf{j} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right).$$

Zahvaljujući gradijentnoj invarijantnosti potencijala, $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ i $\Phi(x,y,z,t)$ mogu da se odaberu tako da zadovoljavaju izraz

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0,$$

pa je onda

$$\Delta\mathbf{A}-\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\mathbf{t^2}}=-\mu_o\mathbf{j}.$$

S druge strane je:

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_o}\rho,$$

$$\mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\Phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{1}{\varepsilon_o}\rho,$$

$$\Delta\Phi+\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\mathbf{A})=-\frac{1}{\varepsilon_o}\rho.$$

Kako je $\mathrm{div}\mathbf{A}=-\varepsilon_o\mu_o\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ tada je

$$\Delta\Phi-\varepsilon_o\mu_o\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_o}\rho.$$

Tako smo umesto četiri Maksvelove parcijalne diferencijalne jednačine koje su spregnute, u kojima su nepoznati **E** i **B**, dobili četiri raspregnute jednačine, koje su lakše za rešavanje, u kojima su nepoznate veličine **A** i Φ.

Osobine divergencije

a) $\mathrm{div}(c\mathbf{a})=c\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{a}$, c=const.

b) $\mathrm{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\mathrm{div}\,\mathbf{b}$,

c) $\mathrm{div}(u\mathbf{a})=u\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,u$, gde je u skalarna funkcija.

Dokaz.

Ovde ćemo da dokažemo samo osobinu c), a osobine a) i b), kao lakše, ostavljamo čitaocu za vežbu.
Kako je:

$$u\mathbf{a}=u\,a_x\mathbf{i}+u\,a_y\mathbf{j}+u\,a_z\mathbf{k}=(u\,a_x)\mathbf{i}+(u\,a_y)\mathbf{j}+(u\,a_z)\mathbf{k},$$

to je:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,(u\mathbf{a})&=\frac{\partial}{\partial x}(ua_x)+\frac{\partial}{\partial y}(ua_y)+\frac{\partial}{\partial z}(ua_z)=\\&=u\cdot\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot a_x+u\cdot\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot a_y+u\cdot\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot a_z=\\&=u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot a_x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot a_y+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot a_z=\\&=u\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,u,\end{aligned}$$

čime je prethodna osobina dokazana.

Neke osobine rotora

a) $\mathrm{rot}\,\mathbf{c}=0$, ako je $\mathbf{c}=\overrightarrow{\mathrm{const.}}$

b) $\mathrm{rot}\,(c\,\mathbf{a})=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$, c =const.,

c) $\mathrm{rot}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathrm{rot}\,\mathbf{a}+\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$,

d) $\mathrm{rot}\,(u\,\mathbf{a})=u\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathrm{grad}\,u$, gde je u skalarna funkcija.

1.1.6 Kratak pregled uvedenih pojmova

		vektorske operacije I vrste		vektorske operacije II vrste
u – skalarna funkcija	$\to$	$\operatorname{grad} u$ – vektor	$\to$	$\begin{cases} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) \end{cases}$
$\mathbf{a}$ – vektorska funkcija	$\to$	$\operatorname{div} \mathbf{a}$ – skalar	$\to$	$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a})$
		$\operatorname{rot} \mathbf{a}$ – vektor	$\to$	$\begin{cases} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) \end{cases}$

Operacije višeg reda

Neka je $u = u(x, y, z)$ skalarno polje, tada je:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = u'_x\mathbf{i} + u'_y\mathbf{j} + u'_z\mathbf{k}.$$

Izračunajmo sada vektorske veličine II vrste:
a)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \qquad (***) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla u \quad - \quad \text{je skalar.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Kako je, za neprekidne funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

to konačno dobijamo:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) \equiv 0. \qquad (1.34)$$

c)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{j}+ \\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}= \\
&=\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{j}+ \\
&+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

d)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = ?$$

Neka je:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i}+v_y\,\mathbf{j}+v_z\,\mathbf{k},$$

odakle, prema (2.47), za $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \\
\Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k}\equiv\mathbf{a},
\end{aligned} \tag{1.35}$$

gde smo uveli sledeće oznake:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\equiv a_1,\ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\equiv a_2,\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\equiv a_3.$$

Dalje, kako je:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z},$$

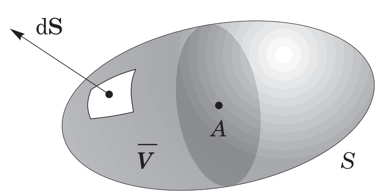
to konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \\
&=\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}\right) \\
&\equiv 0.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

1.1.7 Prostorno diferenciranje

Postupak uopštavanja izvoda u pravcu, naziva se **prostorno diferenciranje**, a rezultat do koga ovaj postupak dovodi naziva se **prostorni izvod**.

Posmatrajmo neku funkciju $\varphi(\mathbf{r})$ koja može da bude skalarna ili vektorska funkcija položaja.



Slika 1.4:

Uočimo u polju ove funkcije neku tačku A i jednu oblast $\overline{V}$ (deo prostora) ograničenu zatvorenom orijentisanom površi S, tako da $A \in \overline{V}$. Neka je:

$$\mathrm{mes}\overline{V} = V \tag{1.37}$$

merni broj zapremine ove oblasti, a $\mathrm{d}\mathbf{S}$ vektorski površinski element na zatvorenoj orijentisanoj površi S. Pretpostavimo dalje, da je φ integrabilna funkcija na površi S, tj. postoji integral po zatvorenoj površi S:

$$I = \iint_S \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{1.38}$$

Ovaj integral može da bude skalarna ili vektorska funkcija veličine V, oblasti $\overline{V}$, koju ograničava zatvorena površ S.

Posmatrajmo sada veličinu I/V i pustimo da se površina šteže"oko fiksne tačke A, tj. neka $V \to 0$. Sada se postavlja pitanje postojanja i određivanja granične vrednosti količnika I/V.

Definicija.

Prostornim izvodom funkcije $\varphi(\mathbf{r})$ nazivamo graničnu vrednost:

$$\lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{1.39}$$

ako ona postoji.

Ako je $\varphi(\mathbf{r})$ skalarna funkcija položaja, tada je $\varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}$ vektor, pa je i prostorni izvod vektor, koji označavamo sa:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r})\, \mathrm{d}\mathbf{S}}{V}. \tag{1.40}$$

Može da se dokaže da ova veličina predstavlja već definisani **gradijent**:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r})\, \mathrm{d}\mathbf{S}}{V}. \tag{1.41}$$

Ako je $\varphi(\mathbf{r})$ vektorska funkcija položaja:

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{1.42}$$

tada, prema kružić–proizvodu, razlikujemo dva slučaja.

U prvom, gde kružić–proizvod predstavlja skalarni proizvod, proizvod $\mathbf{v}\circ\mathrm{d}\mathbf{S}$ predstavlja skalar, pa je i prostorni izvod skalar, označen sa:

$$\nabla\mathbf{v} = \mathrm{div}\,\mathbf{v} = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{1.43}$$

koji zovemo **divergencija**.

U drugom slučaju, gde kružić–proizvod predstavlja vektorski proizvod, proizvod $\mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{S}$ predstavlja vektor, pa je odgovarajući prostorni izvod vektor, koji označavamo sa:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{1.44}$$

i definiše veličinu koju zovemo **rotor**.

Iz prethodnih definicija: *gradijenta*, *divergencije* i *rotora*, sledi njihova nezavisnost od izbora koordinatnog sistema, što smo napomenuli pri njihovoj definiciji u prethodnom poglavlju.

Divergencija i rotor vektorske funkcije konstantnog pravca

Od posebnog je interesa nalaženje izraza za divergenciju vektorske funkcije konstantnog pravca.

Posmatrajmo takav jedan vektor $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} = c\mathbf{c}_0, \quad \text{gde je } \mathbf{c}_0 \text{ jedinični vektor konstantnog pravca.} \tag{1.45}$$

Dalje, po definiciji je:

$$\operatorname{div}\mathbf{c} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{c}\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S c\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}\cdot\mathbf{c}_0 = \operatorname{grad} c\cdot\mathbf{c}_0. \tag{1.46}$$

Koristeći ovu relaciju možemo da napišemo analitički izraz za divergenciju u pravouglom koordinatnom sistemu.

Posmatrajmo neku vektorsku funkciju, izraženu na jedan od načina: [3]

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v_i\mathbf{e}_i. \tag{1.47}$$

Prema gornjoj relaciji imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{v} &= \operatorname{div}(v_x\mathbf{i}) + \operatorname{div}(v_y\mathbf{j}) + \operatorname{div}(v_z\mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{i}\cdot\operatorname{grad} v_x + \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad} v_y + \mathbf{k}\cdot\operatorname{grad} v_z = \\ &= \sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\cdot\operatorname{grad} v_i \equiv \mathbf{e}_i\cdot\operatorname{grad} v_i.\end{aligned} \tag{1.48}$$

Kako je:

$$\operatorname{grad} v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_i}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{1.49}$$

to konačno dobijamo:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{1.50}$$

Dakle, isti izraz kao i u prethodnom poglavlju za pravougle Dekartove koordinate.

I u slučaju rotora korisno je izračunati ga za vektor konstantnog pravca:

$$\mathbf{c} = c\,\mathbf{c}_0, \quad c = |\mathbf{c}| \quad \mathbf{c}_0 = \overrightarrow{\text{const.}} \tag{1.51}$$

Iz definicije divergencije dobijamo:

$$\operatorname{rot}\mathbf{c} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{c}\times\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S c\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}\times\mathbf{c}_0 = \operatorname{grad} c\times\mathbf{c}_0. \tag{1.52}$$

Ako ovo primenimo na neku vektorsku funkciju:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}, \tag{1.53}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} = \\ &= (\operatorname{grad} a_x\times\mathbf{i}) + (\operatorname{grad} a_y\times\mathbf{j}) + (\operatorname{grad} a_z\times\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{1.54}$$

dakle isto kao i u prethodnom poglavlju, za pravougle Dekartove koordinate.

[3] Napomenimo da smo pri pisanju ovog izraza koristili konvenciju o sabiranju, prema kojoj je $\sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i \equiv v_i\mathbf{e}_i$, odnosno vrši se sabiranje po ponovljenim indeksima.

1.1.8 Integralne teoreme

U ovom delu navešćemo nekoliko teorema (Stoksova [4], Grinova [5], Gausova [6]) koje se veoma često koriste u integralnom računu i njegovoj primeni. [7]

Stoksova teorema

Ako su projekcije $v_x(x,y,z)$, $v_y(x,y,z)$ i $v_z(x,y,z)$, neke vektorske funkcije $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, neprekidne, kao i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi, na površi S, koja je zatvorena prostornom krivom C, tada je

$$\oint\limits_C \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \left(= \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\right), \tag{1.55}$$

gde je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na posmatranu površ.

Grinova teorema

Ako za skalarnu funkciju Φ postoji linijski integral po zatvorenoj liniji C i ako je gradΦ neprekidna funkcija, u toj oblasti S ograničenoj krivom C, tada je:

$$\oint\limits_C \Phi\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint\limits_S (\mathbf{n}\times\nabla\Phi)\,\mathrm{d}S \left(= \iint\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\nabla\Phi\right). \tag{1.56}$$

Gausova teorema

Ako za vektorsku funkciju $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ postoji površinski integral po zatvorenoj površi S, koja predstavlja granicu oblasti V, i ako je div $\mathbf{v}$ neprekidna funkcija, u toj oblasti, tada je

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \left(= \iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\right). \tag{1.57}$$

Ova teorema poznata je i kao teorema o divergenciji ili teorema Gaus– Ostrogradskog [8]

Teorema o srednjoj vrednosti

1. Ako je $f(x,y)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u x,y ravni, tada postoji bar jedna tačka $(x_o,y_o)\in\sigma$ takva da je $\iint\limits_\sigma f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o,y_o)\cdot P$, gde je P površina oblasti σ.
2. Ako je $f(x,y,z)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u prostoru, tada postoji bar jedna tačka $(x_o,y_o,z_o)\in\sigma$ takva da je $\iiint\limits_\sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o,y_o,z_o)\cdot V$, gde je V zapremina oblasti σ.

---

[4] Stokes, George Gabriel (1819–1903), irski matematičar i fizičar. Poznat je po svojim prilozima teoriji beskonačnih redova kao i prilozima u mehanici fluida (Navier-Stokes-ove jednačine), geodeziji i optici.

[5] Green, George (1793-1841), engleski matematičar. Njegov rad odnosi se na teoriju potencijala u vezi da elekticitetom i magnetizmom, zatim na oscilacije, talase i teoriju elastičnosti.

[6] Gauss, Carl Friedrich (1777–1855), veliki nemački matematičar. Njegov rad je od osnovne važnosti u algebri, teoriji brojeva, diferencijalnim jednačinama, diferencijalnoj geometriji, neeuklidskoj geometriji, kompleksnoj analizi, astronomiji, geodeziji, elektromagnetizmu i teorijskoj mehanici.

[7] Dokaz ovih teorema, zbog ograničenog prostora, nije dat, a zbog njihove važnosti navodimo ih.

[8] Ostrogradski$, Mihail Vasileviq (1801-1862). Poznati ruski matematičar i mehaničar.