

7 Određeni integrali

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na intervalu $[a, b]$. Ako ovaj interval podelim na n delova tačkama

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

dobijamo (pod)intervale $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

Obeležimo sa Δx_i dužinu intervala $[x_{i-1}, x_i]$, odnosno $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Izaberimo u svakom otvorenom intervalu (x_{i-1}, x_i) neku tačku $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Ako sada, polazeći od vrednosti Δx_i i vrednosti funkcije $f(\xi_i)$ u tački ξ_i formiramo sumu

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

dobićemo *integralnu sumu* funkcije $f(x)$ na odsečku $[a, b]$ koja odgovara odabranom delu intervala.

Ako postoji granična vrednost integralne sume kada broj podintervala teži beskonačnosti, a dužina najvećeg od njih teži nuli, odnosno granična vrednost

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

i ako je ona konačna i jednaka za ma kakvu delu intervala $[a, b]$ i ma kakav izbor tačaka ξ_i onda kažemo da je funkcija $f(x)$ *integrabilna* (u Rimanovom smislu) na odsečku $[a, b]$, a navedenu graničnu vrednost nazivamo *određenim integralom* (u Rimanovom smislu) funkcije $f(x)$ na odsečku $[a, b]$ i označavamo sa

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Funkcija $f(x)$ je *integrand*, odsečak $[a, b]$ *oblast integracije*, a je *donja granica* a b je *gornja granica integrala*.

Svaka neprekidna funkcija ili funkcija sa konačno mnogo prekida I reda na intervalu $[a, b]$ je integrabilna.

Geometrijski interpretirana, integralna suma predstavlja sumu površina pravougaonika čija je jedna strana jednaka $f(\xi_i)$, a druga Δx_i . Površina svakog od tih pravougaonika $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ je približno jednaka površini krivolinijskog trapeza ograničenog x -osom, krivom $f(x)$ i pravama $x = x_{i-1}$ i $x = x_i$.

7.1 Osobine određenih integrala

- 1) Pri definiciji određenog integrala smo pretpostavili da je $a < b$. Ako je $a > b$ onda se uzima po definiciji

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

- 2) Uzima se po definiciji da je

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- 3) Ako je funkcija neprekidna i nenegativna na $[a, b]$ onda je u skladu sa geometrijskom interpretacijom integralne sume i u skladu sa onim što intuitivno podrazumevamo pod površinom krivolinijskog trapeza ograničenog x -osom, krivom $f(x)$ i pravama $x = a$ i $x = b$, ta površina

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

7.2 Osnovna teorema o srednjoj vrednosti integralnog računa

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na odsečku $[a, b]$ tada postoji $c \in [a, b]$ takvo da je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Dokaz 8 *Neka je*

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \text{ a } M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

tada je

$$\sum_{i=1}^n m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i$$

odnosno

$$m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

pa kako je

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$$

7.2 Osnovna teorema o srednjoj vrednosti integralnog računa 65

sledi

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M(b-a).$$

Prema tome je i

$$m(b-a) \leq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M(b-a)$$

odnosno

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ili

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Kako je $f(x)$ neprekidna, ona uzima sve vrednosti između m i M pa prema tome i vrednost

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

odnosno postoji neko c takvo da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 10 Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ tada je za svako $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dokaz 9 Pošto vrednost integralne sume

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i$$

ne zavisi od podele odsečka $[a, b]$, odabraćemo takvu podelu u kojoj je c uvek jedna deona tačka. Tada je

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i$$

pa kad pređemo na granične vrednosti, dobijamo (uz uslov $\max \Delta x_i \rightarrow 0$)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Rezultat važi i za bilo koji raspored tačaka a , b i c , na primer $a < b < c$. Naime, u tom slučaju, kao što smo videli, važi

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

pa je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

a kako je

$$- \int_b^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

to je, konačno

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7.3 Izvod integrala po gornjoj granici

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Sada ćemo, koristeći ovu funkciju, za $x \in [a, b]$ definisati novu funkciju

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

tako da je nezavisno promenljiva x gornja granica integrala. Pokazaćemo da $\Phi(x)$ predstavlja primitivnu funkciju funkcije $f(x)$ na $[a, b]$, odnosno da za svako $x \in [a, b]$ važi

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Dokaz 10 *Potražimo*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Na osnovu osnovne teoreme o srednjoj vrednosti integralnog računa važi da je

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)$$

gde je $c \in [x, x + \Delta x]$, pa je, imajući u vidu neprekidnost funkcije $f(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c) = f(x)$$

odnosno, prema definiciji izvoda funkcije,

$$\Phi'(x) = f(x).$$

7.4 Njutn-Lajbnicova formula

Ako je $F(x)$ bilo koja primitivna funkcija neprekidne funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz 11 Na osnovu prethodnog stava

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ pa kako se sve primitivne funkcije jedne funkcije razlikuju za konstantu to za svaku primitivnu funkciju funkcije $f(x)$ važi

$$F(x) + C = \int_a^x f(t) dt.$$

Ako sada izaberemo da je $x = a$ dobijamo

$$F(a) + C = \int_a^a f(t) dt = 0$$

odakle je $C = -F(a)$, pa je

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Ako, dalje, izaberemo da je $x = b$ dobijamo

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

što nam, kada zamenimo promenljivu t sa x , daje Njutn-Lajbnicovu formulu.

Prema tome, određeni integral funkcije $f(x)$ u intervalu $[a, b]$ može da se izračuna tako što se nađe njena primitivna funkcija $F(x)$, odnosno neodređeni integral, i onda izračuna razlika funkcije $F(x)$ u krajnjim tačkama intervala integracije. Uobičajeno je da se uvede oznaka

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

tako da je

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Primer 61

$$\int_a^b cx dx = c \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = c \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = c \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

7.5 Još neke osobine određenog integrala

1) Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$ onda je

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

Dokaz 12 Neka su $F(x)$ i $G(x)$ primitivne funkcije redom funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Tada je $H(x) = c_1 F(x) + c_2 G(x)$ primitivna funkcija funkcije $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ jer je

$$H'(x) = [c_1 F(x) + c_2 G(x)]' = c_1 F'(x) + c_2 G'(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx &= H(x) \Big|_a^b = H(b) - H(a) = \\ c_1 F(b) + c_2 G(b) - c_1 F(a) - c_2 G(a) &= c_1 (F(b) - F(a)) + c_2 (G(b) - G(a)) = \\ c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

2) Ako su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije na odsečku $[a, b]$ tada je

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Dokaz 13

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u' v dx + \int_a^b uv' dx = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

Sem toga

$$\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$$

pa je

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

odnosno

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Primer 62

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

3) Neka funkcija $\varphi(t)$ ima neprekidan izvod na $[\alpha, \beta]$ i neka je $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$. Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt.$$

Dokaz 14 Neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ i neka je $G(t)$ primitivna funkcija funkcije $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$. Kako je izvod funkcije $F[\varphi(t)]$, kao složene funkcije, jednak $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$, to je i $F[\varphi(t)]$ primitivna funkcija funkcije $f[\varphi(t)]$ pa je

$$F[\varphi(t)] = G(t) + C.$$

Oдавде sledi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] =$$

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt.$$

Primer 63 *Izračunaćemo*

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

tako što ćemo uvesti smenu $x = r \cos t$, odakle je $dx = -r \sin t dt$. Nove granice su $x = 0 \Rightarrow r \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, i $x = r \Rightarrow r \cos t = r \Rightarrow r \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$, tako da dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= -r \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} \sin t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = r^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Napomena: Ovaj integral predstavlja površinu četvrtine kruga $x^2 + y^2 = r^2$.

7.6 Primena određenog integrala u geometriji

7.6.1 Izračunavanje površine ravnih likova

Ako je $f(x)$ neprekidna, nenegativna funkcija na odsečku $[a, b]$ tada je, kao što smo videli, površina krivolinijskog trapeza ograničenog odozdo odsečkom $[a, b]$, odozgo lukom krive $f(x)$ a sa strane pravama $x = a$ i $x = b$ jednaka

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Ova formula se može prilagoditi i drugim slučajevima, kada je $f(x)$ negativna funkcija na odsečku $[a, b]$, pa je krivolinijski trapez ispod x -ose. Tada je površina ovog trapeza

$$P = - \int_a^b f(x) dx.$$

Konačno pomoću određenog integrala može se dobiti i površina između dva grafika $y = f(x)$ i $y = g(x)$, koji se seku u tačkama za koje je $x = a$, odnosno $x = b$. Ta je površina, naime, jednaka

$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Primer 64 *Izračunaćemo površinu figure koju ograničava elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. S obzirom na to da je ova elipsa simetrična u odnosu na koordinatne ose dovoljno je izračunati površinu u I kvadrantu i pomnožiti je sa 4. Iz jednačine*

elipse se za I kvadrant dobija $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, dok su granice integracije od $x = 0$ do $x = a$ pa je

$$P = 4 \int_0^a y dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

Primer 65 Sada ćemo pokazati kako se može naći površina koju formira jedna parametarski zadata kriva. Kao primer ćemo koristiti cikloidu, koja je zadata parametarskim jednačinama

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

i to njen prvi "svod" iznad x -ose, od tačke $x = 0$ to tačke $x = 2a\pi$. Odgovarajuće vrednosti za parametar t biće $t = 0$ i $t = 2\pi$, pa je, imajući u vidu da je $dx = a(1 - \cos t)dt$,

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) \Big|_0^{2\pi} = a^3 \cdot 3\pi. \end{aligned}$$

I u polarnom koordinatnom sistemu određeni integral se može koristiti za izračunavanje površine ravnih likova. Ako je luk \widehat{AB} definisan neprekidnom funkcijom $\rho = f(\theta)$ na $[\alpha, \beta]$ tako da nezavisno promenljivoj $\rho = \alpha$ odgovara tačka A a nezavisno promenljivoj $\rho = \beta$ tačka B , tada je površina krivolinijskog trougla OAB ograničenog lukom \widehat{AB} i polupravama $\rho = \alpha$ i $\rho = \beta$ data sa

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Da bismo to pokazali, podelimo navedeni krivolinijski trougao na n delova polupravama $\theta = \theta_0 = \alpha, \theta = \theta_1, \dots, \theta = \theta_n = \beta$. Površina kružnog isečka sa centralnim uglom $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$ čiji je poluprečnik $\bar{\rho}_k = f(\bar{\theta}_k)$ gde je $\bar{\theta}_k \in (\theta_k, \theta_{k+1})$ je

$$\Delta P_k = \frac{1}{2} \bar{\rho}_k^2 \Delta\theta_k$$

i ona je jednaka približnoj vrednosti krivolinijskog trougla ograničenog polupravama $\theta = \theta_k$ i $\theta = \theta_{k+1}$. Stoga je površina celog trougla približno jednaka

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\bar{\theta}_k) \Delta\theta_k.$$

Ako sada $n \rightarrow \infty$ i $\max \Delta \theta_k \rightarrow 0$ onda je površina krivolinijskog trougla

$$P = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta \theta_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta \theta_k \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\bar{\theta}_k) \Delta \theta_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Primer 66 Naći ćemo površinu figure ograničene lemniskatom, krivom zadatom polarnom jednačinom $\rho = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$. Kako je lemniskata simetrična u odnosu na obe koordinatne ose dovoljno je izračunati jednu četvrtinu (za $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$)

$$P = 4 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

7.6.2 Dužina luka krive

Posmatraćemo najpre krivu zadatu parametarskim jednačinama. Neka je C kriva definisana funkcijama $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, gde su $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ neprekidne funkcije na odsečku $[\alpha, \beta]$. Na toj krivoj uočićemo jedan luk $l = \overline{AB}$, za $t \in [\alpha, \beta]$, a zatim ćemo ga podeliti na n delova tačkama $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$, koje odgovaraju vrednostima parametra t : $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Ako sa p_k označimo dužinu duži $M_k M_{k+1}$, onda je

$$p_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

odakle je dužina cele poligonalne linije $M_0 M_1 \dots M_n$ jednaka

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}.$$

Ako su funkcije $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$ neprekidne onda je na osnovu Lagranžove teoreme

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = (t_{k+1} - t_k) \cdot \varphi'(\tau_k), \tau_k \in (t_k, t_{k+1})$$

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = (t_{k+1} - t_k) \cdot \psi'(\tau_k), \tau_k \in (t_k, t_{k+1}).$$

Sledi da je

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2}.$$

Ako sada uvedemo funkciju $f(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi(t)]^2}$ na $[\alpha, \beta]$, i oznaku $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, onda je, po definiciji određenog integrala

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi(t)]^2} dt.$$

Sa druge strane kada $n \rightarrow \infty$ i $\max \Delta t_k \rightarrow 0$, dužina poligonalne linije teži dužini luka, pa je stoga dužina luka data sa

$$s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2} = \\ \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Primer 67 Naći dužinu luka krive $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}$ između presečnih tačaka sa koordinatnim osama $x = 0 \Rightarrow t = 0$ i $y = 0 \Rightarrow t = \sqrt[4]{8}$.

$$s = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{(t^5)^2 + (t^3)^2} dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3 \sqrt{t^4 + 1} dt = \\ \frac{1}{6} (t^4 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{6} (9^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{6} \cdot 26 = \frac{13}{3}.$$

Posmatrajmo sada krivu C definisanu jednačinom $y = f(x)$ gde su $f(x)$ i $f'(x)$ neprekidne funkcije. Dužinu luka za $x \in [a, b]$ izračunaćemo tako što ćemo iskoristiti prethodno dobijeni rezultat za parametarski zadatu krivu. Naime, ako uzmemo da je $x = t$ a $y = f(x) = f(t)$, onda se, na osnovu prethodnog rezultata može dobiti

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Ako je kriva definisana polarnom jednačinom $\rho = f(\theta)$, gde je $f'(\theta)$ neprekidna funkcija, onda je dužina luka za $\theta \in [\alpha, \beta]$ jednaka

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

Ovu formulu ovde nećemo dokazivati.

Primer 68 Izračunati dužinu kružnog luka poluprečnika r sa centralnim uglom φ . Ako u jednačini kruga $\rho = f(\theta) = r$ uzmemo $\alpha = 0$ i $\beta = \varphi$ dobijamo

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2 + 0^2} d\theta = r \int_0^{\varphi} d\theta = r\varphi.$$

Specijalno, za $\varphi = 2\pi$ dobijamo obim kruga

$$O = r \cdot 2\pi.$$

7.6.3 Površina rotacione površi

Neka je data neka kriva funkcijom $y = f(x)$ koja je neprekidna, zajedno sa svojim izvodom, na odsečku $[a, b]$. Ako luk koji ova kriva formira nad odsečkom $[a, b]$ rotira oko x -ose, onda će on opisivati jednu (rotacionu) površ. Površinu P ove površi ćemo sada odrediti pomoću određenog integrala.

Podelimo najpre luk \widehat{AB} krive, gde je $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ na n delova tačkama $A = M_0, M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n = B$. Ako se ove tačke sada povežu dužima $\overline{M_k M_{k+1}}$ dobiće se jedna poligonalna linija $AM_1 M_2 \dots M_{n-1} B$, koja ima n zajedničkih tačaka sa lukom \widehat{AB} . Označićemo dužinu duži $\overline{M_k M_{k+1}}$ sa $\Delta s_k, (k = 0, 1, \dots, n-1)$. Svaka od ovih duži $\overline{M_k M_{k+1}}$ pri rotaciji oko x -ose opisuje omotač jedne zarubljene kupe čija je površina ΔP_k . Ako sa x_k označimo apscise a sa $y_k = f(x_k)$ ordinate tačaka M_k za $(k = 0, 1, \dots, n)$, onda su y_k i y_{k+1} poluprečnici osnova kupe koja nastaje rotacijom duži $\overline{M_k M_{k+1}}$, dok je ova duž njena izvodnica. Kako je površina omotača zarubljene kupe čiji je poluprečnik manje osnove r a poluprečnik veće osnove R i čija je izvodnica s jednak

$$P = s \cdot \pi(r + R)$$

to je

$$\Delta P_k = \Delta s_k \cdot \pi(y_k + y_{k+1}).$$

Neka je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, a $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Kako je

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

i kako je, po Lagranžovoj teoremi $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(t_k), t_k \in (x_k, x_{k+1})$ to je

$$\Delta P_k = \pi[f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k$$

Cela površina koju opisuje poligonalna linija $AM_1 M_2 \dots M_{n-1} B$ biće, prema tome,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k.$$

Kako broj deonih tačaka luka \widehat{AB} a time i tačaka na poligonalnoj liniji $AM_1 M_2 \dots M_{n-1} B$ raste, a njihovo najveće međusobno rastojanje $\max \Delta s_k$ a time i maksimalno rastojanje između njihovih apscisa $\max \Delta x_k$ se smanjuje, to će se smanjivati i razlika između površine P površi koju opisuje luk

i površine P_n koju opisuje poligonalna linija. Drugim rečima, P predstavlja graničnu vrednost površine P_n kada $n \rightarrow \infty$ a $\max \Delta x_k \rightarrow 0$.

$$P = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} P_n = \pi \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k.$$

Kako $x_k \rightarrow t_k$ i $x_{k+1} \rightarrow t_k$ kada $n \rightarrow \infty$ to se ove dve vrednosti u graničnom procesu mogu zameniti sa t_k pa gornja granična vrednost postaje

$$P = \pi \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} 2f(t_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} \Delta x_k = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Primer 69 Data je sfera poluprečnika r . Naći površinu sferne kalote čija je visina h . Ako zamislimo da je sfera nastala rotacijom gornje polovine kruga $x^2 + y^2 = r^2$ od tačke $A(-r, 0)$ do tačke $B(r, 0)$ oko x -ose, onda je kalota nastala rotacijom kružnog luka \widehat{CB} koji pripada ovoj polovini kruga oko x -ose, takvog da je $C_1(r - h, 0)$ projekcija tačke C na x -osu, odnosno dužina $\overline{C_1B}$ je jednaka h .

Jednačina luka je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ odakle je $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ pa je površina kalote

$$P = 2\pi \int_{r-h}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{r-h}^r dx = 2\pi r x \Big|_{r-h}^r = 2\pi r h.$$

Specijalno, za $h = 2r$ dobijamo površinu sfere $P = 4\pi r^2$.

7.6.4 Zapremina rotacionog tela

Posmatraćemo najpre neko telo V koje se nalazi između dve ravni $x = a$ i $x = b$ normalne na x -osu. Površinu preseka tog tela i bilo koje ravni normalne na x -osu između ravni $x = a$ i $x = b$ označićemo sa $Q = Q(x)$. Na ovaj način definisali smo jednu funkciju $Q(x)$ za $x \in [a, b]$.

Pretpostavićemo da je telo takvo da je funkcija $Q(x)$ neprekidna za $x \in [a, b]$. Zatim ćemo telo V preseći sa n ravni normalnih na x -osu $x = x_0 = a, x = x_1, \dots, x = x_n = b, x_k < x_{k+1}$. Na taj način telo je razbijeno na n nepravilnih zarubljenih kupa. Izračunajmo zapremine ovih kupa ΔV_k . Za svaku zarubljenu kupu, između ravni $x = x_k$ i $x = x_{k+1}$ moguće je izabrati tačku $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ tako da zapremina ΔV_k bude jednaka zapremini cilindra čija je osnova presek tela V sa ravni $x = t_k$ a čija je visina $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Stoga je

$$\Delta V_k = Q(t_k) \Delta x_k$$

dok je ukupna zapremina svih cilindara jednaka

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} Q(t_k) \Delta x_k.$$

Kako broj preseka tela V i ravni paralelnih x -osi raste, a najveće rastojanje između ravni Δx_k se smanjuje, to ukupna zapremina cilindara V_n teži zapremini tela V odnosno

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} V_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^n Q(t_k) \Delta x_k = \int_a^b Q(x) dx.$$

Posebno, ako se radi o telu nastalom rotacijom luka \widehat{AB} krive $f(x)$ oko x -ose i ako je ta kriva neprekidna na $[a, b]$, onda poprečni presek tela sa ravnima paralelnim x -osi predstavlja krugove poluprečnika $f(x)$ koji imaju površinu $Q(x) = \pi f^2(x)$. Sledi da je zapremina rotacionog tela

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Primer 70 Izračunati zapreminu lopte poluprečnika r . Lopta nastaje rotacijom polovine kruga $x^2 + y^2 = r^2$ tako da je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^r - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r = \\ &= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{\pi}{3} (r^3 + r^3) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

7.7 Nesvojstveni integrali

Do sada je bilo reći o određenim integralima funkcija koja su neprekidne i ograničene na konačnom segmentu $[a, b]$. No može se definisati i integral kada funkcija nije definisana na segmentu, nego na poluodsečku $[a, b)$ ili $(a, b]$, ili na intervalu (a, b) , pri čemu krajnja tačka intervala u kojoj funkcija nije definisana može biti beskonačna, a sama funkcija u okolini te tačke neograničena.

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na svakom odsečku $[a, B]$, gde je $B < b \leq +\infty$, i ako postoje konačni

$$\lim_{B \rightarrow b} \int_a^B f(x) dx$$

onda se ta granična vrednost naziva *nesvojstvenim* ili *nepravim* integralom funkcije $f(x)$ na poluodsečku $[a, b)$ a označava se sa

$$\int_a^b f(x)dx$$

gde b može biti jednako i $+\infty$. Dakle

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow b} \Phi(B) = \lim_{B \rightarrow b} \int_a^B f(x)dx.$$

Ako funkcija $\Phi(B)$ određeno divergira ka $+\infty$ ($-\infty$) kažemo da i integral divergira ka $+\infty$ ($-\infty$). Ako granična vrednost uopšte ne postoji, kažemo jednostavno da integral divergira.

Analogno se definiše integral na $(a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow a \\ A > a}} \int_A^b f(x)dx$$

za funkciju koja je integrabilna za svaki odsečak $[A, b] \subset (a, b]$.

Konačno, ako želimo da definišemo integral funkcije na otvorenom intervalu (a, b) , pri čemu je funkcija integrabilna za $[A, B] \subset (a, b)$, tada odaberemo neku tačku c takvu da je $A < c < B$ pa je

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\substack{A \rightarrow a \\ A > a}} \int_a^c f(x) + \lim_{\substack{B \rightarrow b \\ B < b}} \int_a^c f(x).$$

I za nesvojstvene integrale važi da je

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

Primer 71

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{A \rightarrow +0} \int_A^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +0} 2\sqrt{x} \Big|_A^1 = \lim_{A \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{A}) = 2 \\ \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{-x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (1 - e^{-B}) = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \\ \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_A^0 + \lim_{B \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^B = \\ \lim_{A \rightarrow -\infty} (0 - \arctg A) + \lim_{B \rightarrow +\infty} \arctg B &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \\ \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +0} \int_A^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +0} \ln x \Big|_A^1 = \lim_{A \rightarrow +0} (0 - \ln A) = +\infty \end{aligned}$$