

## 1 Nizovi

Niz je funkcija definisana nad skupom prirodnih brojeva  $N$  sa vrednostima u skupu  $R$ :

$$f : N \rightarrow R.$$

Umesto  $f(n)$  za niz se koristi oznaka  $a_n$ . Dakle  $a_n = f(n)$ ,  $n \in N$ , pri čemu se  $a_n$  naziva *opštim članom niza*. Sam niz označava se sa  $(a_n)$ .

Kaže se da niz  $(a_n)$  ima *graničnu vrednost*  $a$  (odnosno da *konvergira* broju  $a$ ), i piše se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

ako za svako dovoljno malo  $\epsilon > 0$  postoji broj  $n_0(\epsilon) \in N$  takav da za svako  $n > n_0(\epsilon)$  važi  $|a_n - a| < \epsilon$ . Piše se i  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Ako niz nije konvergentan, on je *divergentan*. Posebno, ako za svako  $M > 0$  postoji  $n_0(M) \in N$  takvo da je za svako  $n > n_0$   $a_n > M$  kaže se da je niz *određeno divergentan* odnosno da divergira ka  $+\infty$ . Slično se definiše i divergencija ka  $-\infty$ .

**Primer 1** Niz  $a_n = \frac{1}{n}$  je konvergentan i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

*Naime, da bi niz konvergirao ka 0, za svako  $\epsilon > 0$  treba da postoji odgovarajuće  $n_0(\epsilon)$  tako da za svako  $n > n_0$  važi  $|a_n - 0| < \epsilon$ , što u slučaju ovog niza konkretno znači  $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ , odnosno  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , jer je  $n > 0$ . Očigledno je da to važi za  $n > \frac{1}{\epsilon}$  pa je prema tome  $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}]$ , gde je  $[x]$  oznaka za celobrojni deo od  $x$ .*

Za broj  $a$  kažemo da predstavlja *tačku nagomilavanja* niza  $(a_n)$  ako postoji konvergentan podniz ovog niza:  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$  takav da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Najmanja tačka nagomilavanja jednog niza naziva se *limes inferior* i obeležava sa

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

dok se najveća tačka nagomilavanja naziva *limes superior* i označava se sa

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Niz koji ima više od jedne tačke nagomilavanja nije konvergentan.

**Primer 2** Niz

$$a_n = (-1)^n$$

nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja, budući da je

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

odakle je očigledno da podniz  $(a_{2n})$  konvergira broju 1 a podniz  $(a_{2n+1})$  broju  $-1$ . Sledi da je

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

**Teorema 1** Ako za sve članove dva niza  $(a_n)$  i  $(b_n)$  važi  $a_n \leq b_n$ , i ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

onda je  $a \leq b$ .

**Dokaz 1** Ovo ćemo dokazati tako što ćemo pretpostaviti suprotno:  $b < a$ . U tom slučaju postoji neko  $c$  takvo da je  $b < c < a$ . Kako  $a_n$  konvergira broju  $a$  to bez obzira na to koliko mala može biti vrednost  $|c - a|$  uvek postoji neki prirodan broj  $n'$  takav da je  $|a_n - a| < |c - a|$  za svako  $n > n'$ . Odatle, nadalje sledi da za svako  $n > n'$  važi  $a_n > c$ . Sa druge strane, bez obzira na to koliko mala može biti vrednost  $|b - c|$  uvek postoji neki prirodan broj  $n''$  takav da je  $|b_n - b| < |b - c|$  za sve vrednosti  $n > n''$ , pa je prema tome  $b_n < c$  za  $n > n''$ . Ako je sada  $n_0 = \max\{n', n''\}$  onda za sve vrednosti  $n > n_0$  važi  $b_n < c < a_n$  što je suprotno pretpostavci  $a_n \leq b_n$ .

**Teorema 2** Ako su nizovi  $(a_n)$  i  $(c_n)$  konvergentni i imaju istu graničnu vrednost  $a$ , odnosno ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

i ako pri tome postoji niz  $(b_n)$  takav da za svako  $n$  važi  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , onda je i niz  $(b_n)$  konvergentan i njegova granična vrednost je takođe jednaka  $a$ , odnosno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

**Dokaz 2** Naime, za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $n'$  takvo da za  $n > n'$  važi  $|a_n - a| < \epsilon$ , ili drugim rečima  $a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon$ , kao i  $n''$  takvo da za  $n > n''$  važi  $|c_n - a| < \epsilon$  odnosno  $a - \epsilon \leq c_n \leq a + \epsilon$ . Ako je sada  $n_0 = \max\{n', n''\}$  onda za  $n > n_0$  važi  $a - \epsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq a + \epsilon$  odakle je  $a - \epsilon \leq b_n \leq a + \epsilon$  odnosno  $|b_n - a| < \epsilon$ . Drugim rečima, za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $n_0$  takvo da za  $n > n_0$  važi  $|b_n - a| < \epsilon$ , što znači da i niz  $(c_n)$  konvergira ka vrednosti  $a$ .

Ako su  $(a_n)$  i  $(b_n)$  dva konvergentna niza, i ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \text{za} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

Sem pomenute definicije konvergencije postoje i različiti *kriterijumi konvergencije*. Ovim kriterijumima se definišu uslovi pod kojima niz konvergira, a da pri tome sama granična vrednost niza ne mora biti poznata. Jedan od najpoznatijih kriterijuma konvergencije je *Košijev kriterijum konvergencije* po kome niz  $(a_n)$  konvergira ako i samo ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji  $n_0(\epsilon)$  takvo da za  $n > m \geq n_0$  važi  $|a_n - a_m| < \epsilon$ . Primitimo da se u ovom kriterijumu ne koristi sama granična vrednost  $a$  kao što je to slučaj u definiciji konvergencije na početku ovog odeljka.

Pored Košijevog kriterijuma konvergencije koji je opšteg karaktera ovde ćemo navesti još jedan značajan kriterijum konvergencije koji važi za monotone i ograničene nizove. Najpre ćemo definisati osobine monotonosti i ograničenosti nizova. Naime, niz je *monotono rastući* ako svaki njegov član nije manji od prethodnog, odnosno ako za svako  $n$  važi  $a_n \leq a_{n+1}$ . Analogno, niz je *monotono opadajući* ako svaki njegov član nije veći od prethodnog, odnosno ako za svako  $n$  važi  $a_n \geq a_{n+1}$ . Niz je *ograničen odozgo* ili *sa gornje strane* ako nijedan njegov član nije veći od neke realne konstante  $M$ , odnosno ako za svako  $n$  važi  $a_n \leq M$ , gde je  $M \in \mathbb{R}$ . Analogno, niz je *ograničen odozdo* ili *sa donje strane* ako nijedan njegov član nije manji od neke realne konstante  $m$ , odnosno ako za svako  $n$  važi  $a_n \geq m$ , gde je  $m \in \mathbb{R}$ . Za monotone i ograničene nizove važi sledeći kriterijum konvergencije: svaki monotono rastući niz ograničen odozgo je konvergentan, i svaki monotono opadajući niz ograničen odozdo je konvergentan.

**Primer 3** Iskoristimo kriterijum konvergencije za monotone i ograničene nizove da bismo pokazali da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0, (c > 0).$$

Ako opšti član ovog niza označimo sa  $a_n = \frac{c^n}{n!}$  onda, s obzirom na to da je  $c^{n+1} = c \cdot c^n$  i  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$  dobijamo da je  $a_{n+1} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c^n}{(n)!} \cdot \frac{c}{n+1} = a_n \cdot \frac{c}{n+1}$ . Kako je, dalje,  $c$  konstanta a  $n$  raste, to znači da od neke vrednosti  $n_0$  počinje da važi  $n+1 > c$ , odnosno  $\frac{c}{n+1} < 1$  te prema tome niz postaje monotono opadajući. Kako je, pri tome,  $a_n > 0$ , niz je ograničen odozdo, pa je po kriterijumu o monotonim i ograničenim nizovima konvergentan. Ako sada graničnu vrednost ovog niza označimo sa  $a$  onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n+1} = 0$$

to iz  $a_{n+1} = \frac{c}{n+1} \cdot a_n$ , budući da se ovde radi o tri konvergentna niza sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

odnosno  $a = 0 \cdot a$ , odakle je očigledno  $a = 0$ . Na ovaj način smo došli i do granične vrednosti niza, iako smo konvergenciju ovog niza utvrdili pre nego što nam je ta vrednost bila poznata.

**Primer 4** Pomoću kriterijuma za monotone i ograničene nizove može se dokazati i konvergencija jednog veoma značajnog niza, a to je niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Konstatujmo najpre da je

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sada primenom binomnog obrasca na opšti član niza koji predstavlja  $n - ti$  stepen binoma dobijamo

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \\
& \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) < \\
& \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = \\
& \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n+1-k+1)}{k!(n+1)^k} = \\
& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^{n+1-k} \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Prema tome  $a_n < a_{n+1}$  pa niz monotono raste. Kako je  $a_1 = 2$  do znači da je  $a_n > 2$ . Sa druge strane,

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \\
1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} &< 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3
\end{aligned}$$

pa je  $2 < a_n < 3$ . Niz  $a_n$  je, dakle, rastući niz koji je ograničen odozgo pa je prema tome, konvergentan. Kako su svi članovi niza između 2 i 3 to je i

$$2 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 3.$$

Granična vrednost niza  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  je jedan transcendentan iracionalan broj koji se naziva Ojlerovim i označava se sa  $e$ . Približna vrednost broja  $e$ , na 5 decimala je 2.71828... Dakle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$$

Navešćemo, bez dokaza, i granične vrednosti sledećih nizova

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 0), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, (a > 0, k \in \mathbb{R}), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.
\end{aligned}$$