

6 Neodređeni integrali

Funkcija $F(x)$ na intervalu $(a, b) \in \mathbb{R}$ je *primitivna* ili *prvobitna* funkcija funkcije $f(x)$, ako je $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x).$$

Primer 38 Funkcija $F(x) = \sin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x$ na $(-\infty, +\infty)$, jer je

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x).$$

Primetimo da su, na primer, i funkcije $\sin x + 5$, $\sin x - 3$ i $\sin x + \sqrt{\pi}$ takođe primitivne funkcije za $\cos x$ na $(-\infty, +\infty)$, jer je i

$$(\sin x + 5)' = (\sin x - 3)' = (\sin x + \sqrt{\pi})' = \cos x.$$

Iz prethodnog primera vidi se da primitivna funkcija nije jednoznačno određena.

Teorema 9 Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na (a, b) i $C \in \mathbb{R}$ bilo koji realan broj, tada je i $F(x) + C$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na (a, b) .

Dokaz 7 Na osnovu osobina izvoda dobijamo $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ zove se *neodređeni integral* funkcije $f(x)$ i označava se sa

$$\int f(x)dx$$

pri čemu $f(x)$ predstavlja *podintegralnu funkciju* ili *integrand* a $f(x)dx$ *podintegralni izraz*. Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ onda je

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}.$$

Uobičajeno je da se piše

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

6.1 Osobine neodređenih integrala

1. $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$
2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$
3. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \in R$

Kako je, na osnovu osobina diferencijala,

$$d[kF(x)] = kdF(x)$$

to je

$$\int kf(x)dx = \int kdF(x) = \int dkF(x) = kF(x) + C = k[F(x) + C_1] = k \int f(x)dx.$$

4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Neka je $\int f(x)dx = F(x) + C$ i $\int g(x)dx = G(x) + C$.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int [f(x)dx + g(x)dx] = \int [dF(x) + dG(x)] = \int d[F(x) + G(x)] = F(x) + G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

6.2 Tablica integrala elementarnih funkcija

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
 $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C, \alpha = -1$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
 $\int e^x dx = e^x + C, a = e$
3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, a = 1$
4. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, a \neq 0$
 $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, a = 1$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, a = 1$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a \neq 0$
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C, a = 1$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

6.3 Osnovne metode integracije

6.3.1 Metoda dekompozicije

Metoda se zasniva na navedenim osobinama intergrala.

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$$

Primer 39 $\int (2x^2 - 3e^x + 7\sqrt{x}) dx = 2 \int x^2 dx - 3 \int e^x dx + 7 \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^3 - 3e^x + \frac{14}{3}x\sqrt{x} + C$

6.3.2 Metoda parcijalne integracije

Metoda polazi od ideje da se podintegralni izraz podeli na dva dela, odnosno izrazi kao proizvod

$$\int f(x) dx = \int g(x) \cdot h(x) dx.$$

Ako se sada uvedu oznake

$$g(x) = u \quad h(x) dx = dv$$

dobija se dalje da je

$$v = \int dv = \int h(x) dx \quad du = g'(x) dx.$$

Formula za parcijalnu integraciju ima oblik

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ova formula se može izvesti polazeći od osobine diferencijala $d(uv) = u dv + v du$. Naime, kada se integrišu leva i desna strana ove jednakosti dobija se

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

odnosno

$$uv = \int u dv + \int v du$$

i konačno

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Funkcije u i v moraju biti diferencijabilne, a za udv i vdu moraju postojati integrali.

Primer 40

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Pri tome smo koristili

$$u = \ln x, dv = x^2 dx, v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, du = \frac{1}{x} dx.$$

6.3.3 Metoda smene nezavisno promenljive

Neka je funkcija $x = \varphi(t)$ definisana i neka ima neprekidni izvod $\varphi'(t)$ na nekom intervalu $[\alpha, \beta]$, i neka je pri tome njen antidomen $[a, b]$. Konačno, neka postoji inverzna funkcija $\varphi^{-1} : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$. Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ tada je

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Naime, diferenciranjem izraza na desnoj strani po x , imajući pri tome u vidu pravila za diferenciranje složene i inverzne funkcije, dobijamo

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = \\ f[\varphi(t)] \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} &= f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Primer 41

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{dt}{t} = - \ln |t| + C = - \ln |\cos x| + C$$

pri čemu smo koristili smenu

$$\cos x = t, - \sin x dx = dt.$$

Efikasnost smene nezavisno promenljive zavisiće od toga kakva funkcija $\varphi(t)$ je odabrana, odnosno da li je integral na desnoj strani formule za smenu promenljivih jednostavniji za izračunavanje od integrala na levoj strani.

6.4 Integrali sa kvadratnim trinomom $ax^2 + bx + c$

Prilikom rešavanja nekih tipova integrala koji sadrže kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) najpre je potrebno ovaj trinom svesti na kanonički oblik, na sledeći način

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$$

gde je $\pm k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Znak ispred k^2 je pozitivan ako je $4ac - b^2$ pozitivno, a negativan ako je $4ac - b^2$ negativno, odnosno zavisi od toga da li trinom $ax^2 + bx + c$ ima realne ili kompleksne korene. Takođe je moguće i da bude $k = 0$.

Prvi tip integrala sa kvadratnim trinomom je

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]} = \int \frac{dt}{a(t^2 \pm k^2)}$$

Ovaj integral se dalje svodi na jedan od sledeća dva integrala

$$\int \frac{dt}{a(t^2 + k^2)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C, 4ac - b^2 > 0$$

$$\int \frac{dt}{a(t^2 - k^2)} = - \int \frac{dt}{a(k^2 - t^2)} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+t}{k-t} \right| + C, 4ac - b^2 < 0.$$

Primer 42

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x + 2}{\sqrt{2} - x - 2} \right| + C.$$

Sledeći tip integrala je

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Ovaj tip svodi se na prethodni tip (I_1) na sledeći način

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{A \cdot \frac{2a}{2a} \cdot x + A \cdot \frac{b}{2a} + B - \frac{A \cdot b}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx = \\
 &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + (B - \frac{A \cdot b}{2a})}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{A \cdot b}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \\
 &= \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{A \cdot b}{2a} \right) I_1.
 \end{aligned}$$

Primer 43

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x + 2}{2x^2 + 8x + 20} dx &= \int \frac{\frac{3}{4}(4x + 8) + (2 - \frac{3 \cdot 8}{4})}{2x^2 + 8x + 20} dx = \\
 &= \frac{3}{4} \int \frac{4x + 8}{2x^2 + 8x + 20} dx - 4 \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \\
 &= \frac{3}{4} \ln |2x^2 + 8x + 20| - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} + C
 \end{aligned}$$

Treći tip integrala predstavlja sledeći integral u kome se kvadratni trinom pojavljuje pod kvadratnim korenom

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

U slučaju kada je $a > 0$, za ovaj integral se svođenjem kvadratnog trinoma na kanonični oblik i uvođenjem smene kao i u prethodnim slučajevima, dobija

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| + C.$$

Analogno, kada je $a < 0$, integral se svodi na

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{k} + C.$$

Primer 44

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 20}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+1)^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x+1}{2} + C \end{aligned}$$

Sledeći tip integral svodi se na predhotni (I_3) na isti način na koji se integral tipa I_2 svodi na integral tipa I_1

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{A \cdot \frac{2a}{2a} \cdot x + A \cdot \frac{b}{2a} + B - \frac{A \cdot b}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{A \cdot b}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\ &= \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{A \cdot b}{2a} \right) I_3 \end{aligned}$$

Primer 45

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 20}} dx &= \int \frac{\frac{5}{4}(4x + 8) + (-3 - \frac{5 \cdot 8}{4})}{\sqrt{2x^2 + 8x + 20}} dx = \\ &= \frac{5}{4} \int \frac{4x + 8}{\sqrt{2x^2 + 8x + 20}} dx - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 20}} = \\ &= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 20} - 13 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}| + C \end{aligned}$$

Poslednji tip integrala sa kvadratnim trinomom ima sledeći oblik

$$I_5 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx.$$

I za ovaj integral razmotrićemo dva slučaja, kada je $a > 0$ i kada je $a < 0$, pri čemu treba naglasiti da je postupak rešavanja u oba slučaja gotovo isti.

Posmatraćemo najpre slučaj kada je $a > 0$. Kao i u prethodnim slučajevima, prvo ćemo kvadratni trinom svesti na kanonični oblik, a zatim uvesti smenu, posle čega dobijamo

$$I_5 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \sqrt{a} \int \sqrt{t^2 \pm k^2} dt = \sqrt{a} I$$

gde je

$$I = \int \sqrt{t^2 \pm k^2} dt.$$

U daljem postupku rešavaćemo integral I tako što ćemo ga transformisati i razložiti na dva integrala

$$I = \int \sqrt{t^2 \pm k^2} dt = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} dt \pm k^2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$$

Drugi integral je tablični, pa se uz parcijalnu integraciju prvog integrala dobija

$$I = t \cdot \sqrt{t^2 \pm k^2} - \int \sqrt{t^2 \pm k^2} dt \pm k^2 \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}|$$

gde je

$$t = u \quad dt = du \quad \frac{t dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = dv \quad v = \sqrt{t^2 \pm k^2}.$$

Sada smo dobili jednačinu u kojoj se integral I pojavljuje i na levoj i na desnoj strani

$$I = t \cdot \sqrt{t^2 \pm k^2} - I \pm k^2 \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}|$$

odakle je

$$2I = t \cdot \sqrt{t^2 \pm k^2} \pm k^2 \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}|$$

odnosno

$$I = \frac{1}{2} \left[t \cdot \sqrt{t^2 \pm k^2} \pm k^2 \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| \right]$$

i konačno

$$I_5 = \frac{\sqrt{a}}{2} \left[t \cdot \sqrt{t^2 \pm k^2} \pm k^2 \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| \right] + C.$$

Analogno, ako važi $a < 0$

$$I_5 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \sqrt{|a|} \int \sqrt{k^2 - t^2} dt = \sqrt{|a|} I$$

a zatim se ponovo, korišćenjem parcijalne integracije rešava integral I

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{k^2 - t^2} dt = \int \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - t^2}} dt - \int \frac{t^2}{\sqrt{k^2 - t^2}} dt = \\ &= \int \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - t^2}} dt - \left[(-t) \cdot \sqrt{k^2 - t^2} + \int \sqrt{k^2 - t^2} dt \right] = \\ &= k^2 \arcsin \frac{t}{k} + t\sqrt{k^2 - t^2} - I \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}(t\sqrt{k^2 - t^2} + k^2 \arcsin \frac{t}{k})$$

odnosno

$$I_5 = \frac{\sqrt{|a|}}{2}(t\sqrt{k^2 - t^2} + k^2 \arcsin \frac{t}{k}).$$

Primer 46

$$I = \int \sqrt{2x^2 + 8x + 20} dt = \sqrt{2} \int \sqrt{x^2 + 4x + 10} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{(x+2)^2 + 6} dx =$$

$$\sqrt{2} \int \sqrt{t^2 + 6} dt \quad (x+2 = t)$$

$$I_1 = \int \sqrt{t^2 + 6} dt = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 6}} dt + \int \frac{6}{\sqrt{t^2 + 6}} dt =$$

$$t \cdot \sqrt{t^2 + 6} - \underbrace{\int \sqrt{t^2 + 6} dt}_{I_1} + 6 \ln |t + \sqrt{t^2 + 6}|$$

$$I_1 = \frac{1}{2} [t \cdot \sqrt{t^2 + 6} + 6 \ln |t + \sqrt{t^2 + 6}|]$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} (x+2) \sqrt{x^2 + 4x + 10} + 3\sqrt{2} \ln |x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10}| + C$$

6.5 Integrali racionalnih funkcija

Pod racionalnom funkcijom ovde podrazumevamo funkciju koja predstavlja količnik dva polinoma

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

gde su $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n , respektivno.

Ako je $m < n$ i $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ nemaju zajedničkih nula, tada za funkciju $R(x)$ kažemo da je *prava* racionalna funkcija. Ako za racionalnu funkciju važi da je $m \geq n$ onda se ona može se svesti na zbir polinoma reda $l = m - n$ i prave racionalne funkcije.

$$R(x) = S_l(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}$$

gde je $k < m$. Integral svake racionalne funkcije se, prema tome, može svesti na integral polinoma (koji se rešava tablično) i integral prave racionalne funkcije, pa ćemo stoga nadalje smatrati da je racionalna funkcija $R(x)$ uvek prava racionalna funkcija.

Najpre ćemo konstatovati da se svaki polinom n -tog stepena

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

može predstaviti u obliku:

$$Q_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_{n_1})^{k_{n_1}} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_{n_2}x + q_{n_2})^{l_{n_2}}$$

pri čemu su x_1, x_2, \dots, x_{n_1} realne nule polinoma $Q_n(x)$, a kvadratni trinomi $x^2 + px + q$ nemaju realnih nula, već su u njima sadržani konjugovano kompleksni parovi nula polinoma $Q_n(x)$, pa je stoga $k_1 + k_2 + \dots + k_{n_1} + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_{n_2}) = n$.

Racionalne funkcije

$$\frac{A}{(x - a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$$

gde su A, B, a, p, q realni brojevi, a k prirodan broj, i pri čemu polinom $x^2 + px + q$ nema realnih nula, nazivamo *prostim* racionalnim funkcijama.

Ako je $R(x)$ prava racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad m < n$$

i ako se pri tome polinom $Q_n(x)$ predstavi u obliku gornjeg proizvoda, tada postoje konstante

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1k_1}, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2k_2}, \dots, A_{n_11}, A_{n_12}, \dots, A_{n_1k_{n_1}},$$

$$B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1l_1}, B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2l_2}, \dots, B_{n_21}, B_{n_22}, \dots, B_{n_2l_{n_2}},$$

$$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1l_1}, C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2l_2}, \dots, C_{n_21}, C_{n_22}, \dots, C_{n_2l_{n_2}}$$

takve da je

$$R(x) = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{n_11}}{x-x_{n_1}} + \frac{A_{n_12}}{(x-x_{n_1})^2} + \dots + \frac{A_{n_1k_{n_1}}}{(x-x_{n_1})^{k_{n_1}}} \\
& + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \\
& + \frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots + \frac{B_{2l_2}x+C_{2l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \dots + \frac{B_{n_21}x+C_{n_21}}{x^2+p_{n_2}x+q_{n_2}} + \\
& + \frac{B_{n_22}x+C_{n_22}}{(x^2+p_{n_2}x+q_{n_2})^2} + \dots + \frac{B_{n_2l_{n_2}}x+C_{n_2l_{n_2}}}{(x^2+p_{n_2}x+q_{n_2})^{l_{n_2}}}.
\end{aligned}$$

To znači da svaka prava racionalna funkcija može da se prikaže kao konačan zbir prostih racionalnih funkcija. Konstante A_{ij} , B_{ij} i C_{ij} određuju se množenjem gornjeg izraza faktorizovanim oblikom polinoma $Q_n(x)$ pri čemu jednačina prelazi u jednakost dva polinoma. Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene dobija se sistem linearnih jednačina po nepoznatim A_{ij} , B_{ij} i C_{ij} . Ovaj metod se zove *metod neodređenih koeficijenata*.

Primer 47

$$\frac{x^2+2}{x^4+3x^2} = \frac{x^2+2}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} \Big/ \cdot x^2(x^2+3)$$

odakle je

$$x^2+2 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 =$$

$Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$
pa izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobijamo sistem jednačina

$$A+C=0$$

$$B+D=1$$

$$3A=0$$

$$3B=2$$

odakle je

$$A=0 \quad B=\frac{2}{3} \quad C=0 \quad D=\frac{1}{3}$$

pa je, prema tome,

$$\frac{x^2+2}{x^4+3x^2} = \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Primer 48

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}$$

odakle je

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 2 &= (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + 2Ax + 2B + Cx + D = \\ &Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + 2B + D \end{aligned}$$

pa sledi

$$A = 1$$

$$B = 1$$

$$2A + C = 0$$

$$2B + D = 2$$

odnosno

$$A = 1 \quad B = 1 \quad C = -2 \quad D = 0$$

i konačno

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x + 1}{x^2 + 2} - \frac{2x}{(x^2 + 2)^2}.$$

Integracija racionalnih funkcija se, kao što smo videli, primenom metode neodređenih koeficijenata svodi na integraciju prostih racionalnih funkcija, pa ostaje da razmotrimo kako se rešavaju integrali racionalnih funkcija. Kako je

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x - a)^k} dx = \int A(x - a)^{-k} dx = A \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k + 1} + C =$$

$$\frac{A}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C \quad k > 1$$

i kako smo pokazali kako se izračunava

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx$$

ostaje da pokažemo kako se izračunava

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

kada je $k > 1$.

Najpre ćemo transformisati prostu racionalnu funkciju

$$\begin{aligned} \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} &= \frac{\frac{A}{2}(2x + p) - \frac{A}{2}p + B}{(x^2 + px + q)^k} = \\ &= \frac{A}{2} \cdot \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} + \left(B - \frac{pA}{2}\right) \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} \end{aligned}$$

Odavde je

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \left(B - \frac{pA}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx.$$

Za prvi integral se uvodi smena $x^2 + px + q = t$, $(2x + p)dx = dt$, posle čega je

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{dt}{t^k} dt = -\frac{1}{(k-1)t^{k-1}} = -\frac{1}{(k-1)(x^2 + px + q)^{k-1}}$$

Ostaje da rešimo

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}\right]^k}$$

Kako polinom $x^2 + px + q$ nema realnih nula, to je $p^2 - 4q < 0$ odnosno $4q - p^2 > 0$, pa možemo uvesti oznaku $\frac{4q - p^2}{4} = a^2$. Dalje se, smenom $x + \frac{p}{2} = t$ dobija

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$$

Preostaje nam, konačno, rešavanje integrala

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

Za $k = 1$ dobijamo tablični integral

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Za $k > 1$ primenom parcijalne integracije dobijamo

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + \int \frac{2kt^2}{(t^2 + a^2)^{k+1}} dt$$

pri čemu je

$$u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} \quad dv = dt$$

$$du = -\frac{2kt}{(t^2 + a^2)^{k+1}} \quad v = t$$

i dalje

$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{k+1}} dt = \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{k+1}} dt =$$

$$\frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} - 2ka^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}.$$

Oдавde se dobija da je

$$2ka^2 I_{k+1} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + (2k - 1)I_k$$

odakle sledi rekurentna formula

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + \frac{2k - 1}{2ka^2} I_k \quad k = 1, 2, \dots$$

Primer 49 Iz rekurentne formule dobija se direktno

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Primer 50 Rešićemo sada integral racionalne funkcije

$$I = \int \frac{x^2 + 2}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - x} dx.$$

Polinom $x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - x$ može da se predstavi u vidu proizvoda $x(x-1)(x^2+1)^2$, odakle je

$$I = \int \frac{x^2 + 2}{x(x-1)(x^2+1)^2} dx.$$

Metodom neodređenih koeficijenata dobijamo

$$\frac{x^2 + 2}{x(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

odnosno

$$x^2+2 = A(x-1)(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1)^2 + (Cx+D)x(x-1)(x^2+1) + (Ex+F)x(x-1)$$

Oдавде se sada može dobiti sistem linearnih jednačina sa 6 nepoznatih.

Mi ćemo, međutim, do nepoznatih koeficijenata doći na drugi način. Najpre ćemo u gornjoj jednakosti promenljivu x zameniti nekim konkretnim vrednostima.

Ako se uzme da je $x = 0$ dobija se $2 = -A$, odnosno $A = -2$.

Slično, za $x = 1$ sledi $3 = 4B$, odnosno $B = \frac{3}{4}$.

Dalje, za $x = i$ dobijamo $1 = (Ei+F)i(i-1) = -(1+i)(Ei+F) = E-F + i(-E-F)$, pa je odatle $E-F = 1$, $-E-F = 0$, odnosno $F = -\frac{1}{2}$ $E = \frac{1}{2}$.

Ostalo je, još, da odredimo koeficijente C i D .

Kako u polinomu sa desne strane uz x^5 stoji $A+B+C$ a kako sa leve strane x^5 ne postoji, to je $A+B+C = 0$ pa kada zamenimo dobijene vrednosti za A i B dobijamo $-2 + \frac{3}{4} + C = 0$ odnosno $C = \frac{5}{4}$.

Analogno, kako je uz x^4 sa desne strane $-A+D-C$ sledi da je $-A+D-C = 0$ odnosno $D = A+C = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$.

Na osnovu dobijenih vrednosti svih nepoznatih koeficijenata, imamo da je

$$\frac{x^2 + 2}{x(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{5x-3}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}$$

pa je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + 2}{x(x-1)(x^2+1)^2} dx \\ &= -2 \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{5x-3}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= -2 \ln|x| + \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{5}{8} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{4} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$= -2 \ln |x| + \frac{3}{4} \ln |x-1| + \frac{5}{8} \ln |x^2+1| - \frac{3}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

pri čemu je, kao što smo videli,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

6.6 Integrali nekih iracionalnih funkcija

Funkcije koje su istovremeno racionalne po x i po y , odnosno koje, ako se posmatraju samo po x , predstavljaju količnik dva polinoma, i ako se posmatraju samo po y takođe predstavljaju količnik dva polinoma obeležavamo sa $R(x, y)$.

Primer 51

$$R(x, y) = \frac{5x^3 - 4xy^2 + \sqrt{2}xy - 5}{3x^2y + y^4 - 4xy^3 + 2}$$

Pojam funkcije $R(x, y)$ možemo generalisati na n promenljivih tako da ćemo pod $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ podrazumevati funkciju koja je racionalna za svaki od njenih argumenata x_1, x_2, \dots, x_n ponaosob, gde svaki od argumenata može uzimati različite oblike, pa i iracionalne.

Mi ćemo sada posmatrati neke integrale iracionalnih funkcija koje su oblika $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i koji se različitim smenama mogu svesti na integrale racionalnih funkcija.

Posmatrajmo najpre integrale oblika

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right) dx.$$

Ovi interali se svode na integrale racionalnih funkcija (po t) smenom

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$$

gde je k najmanji zajednički sadržalac imenilaca razlomaka $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Iz smene sledi da je

$$x = \frac{dt^k - b}{-ct^k + a}$$

tj. x je racionalna funkcija od t . Zato će i dx biti racionalna funkcija od t i dt pa će ceo podintegralni izraz postati $\bar{R}(t)$ gde je $\bar{R}(t)$ neka nova racionalna funkcija od t .

Primer 52

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}}{1+\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

Izraz $3x+1$ se pojavljuje sa eksponentom $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ pa je najmanji zajednički sadržalac za 2 i 3 jednak 6. Smena je

$$3x+1 = t^6$$

$$t = \sqrt[6]{3x+1}$$

$$3dx = 6t^5 dt.$$

Dobija se integral racionalne funkcije

$$\begin{aligned} \int \frac{t^3}{1+t^2} 2t^5 dt &= 2 \int \frac{t^8}{1+t^2} dt = 2 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + C \\ &= \frac{2}{7} (3x+1) \sqrt[6]{3x+1} - \frac{2}{5} \sqrt[6]{(3x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - 2 \sqrt[6]{3x+1} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{3x+1} + C. \end{aligned}$$

Primer 53

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

Smena je

$$\frac{1-x}{1+x} = t^3$$

odakle je

$$1-x = t^3(1+x) \quad x(1+t^3) = 1-t^3$$

odnosno

$$x = \frac{1-t^3}{1+t^3}$$

i konačno

$$dx = \frac{-3t^2(1+t^3) - 3t^2(1-t^3)}{(1+t^3)^2} dt.$$

Dobijamo sada integral racionalne funkcije

$$\int \frac{1}{\left(1 + \frac{1-t^3}{1+t^3}\right)^2} t \cdot \frac{-6t^2}{(1+t^3)^2} dt = -6 \int \frac{t^3(1+t^3)^2}{2^2} \frac{1}{(1+t^3)^2} dt =$$

$$-\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Integrali oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

svode se na racionalne integrale nezavisno promenljive t pomoću jedne od Ojlerovih smena.

1) Ako je $a > 0$ tada se uvodi smena

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax} \quad \text{ili} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{ax}$$

odakle se kvadriranjem leve i desne strane (u slučaju prve smene) dobija

$$ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{at}x + ax^2$$

odakle je

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a} \cdot t}$$

racionalna funkcija po t , a samim tim i dx je racionalna funkcija po t . Analogan rezultat se dobija u slučaju druge smene.

2) Ako je $c > 0$ uvodi se smena

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \quad \text{ili} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$$

odakle je (opet u slučaju prve smene)

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2\sqrt{c}xt + c$$

odnosno

$$ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t$$

pa su

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$$

i dx racionalne funkcije po t . Analogno, za drugu smenu.

- 3) Ako su α i β realni koreni jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ tada se može uvesti smena

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$

odakle se kvadriranjem leve i desne strane dobija

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2t$$

ili, pošto su α i β nule kvadratnog trinoma

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2t$$

Skraćivanjem leve i desne strane sa $x - \alpha$ dobija se

$$ax - a\beta = xt^2 - \alpha t^2$$

odnosno

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$$

dakle racionalna funkcija po t .

Primer 54

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Primenom prve Ojlerove smene

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x$$

dobija se

$$2x + 2 = t^2 - 2tx$$

odnosno

$$x = \frac{t^2 - 2}{2(t + 1)}$$

i

$$dx = \frac{2t \cdot 2(t + 1) - 2(t^2 - 2)}{4(t + 1)^2} dt = \frac{2t^2 + 4t + 4}{4(t + 1)^2} dt = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t + 1)^2} dt.$$

Odavde je

$$I = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t + 1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 2t + 2}{t(t + 1)^2} dt.$$

Razlaganjem funkcije

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{t(t + 1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1} + \frac{C}{(t + 1)^2}$$

metodom neodređenih koeficijentata dobijamo

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{t(t+1)^2} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + 2t + 2}{t(t+1)^2} dt &= \int \frac{2dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + C \\ &= -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{t^2}{t+1} + \frac{1}{t+1} \right) + C. \end{aligned}$$

Primer 55

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

Ovde ćemo primeniti drugu Ojlerovu smenu

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} = xt - 1$$

i dobiti

$$\begin{aligned} -2x - x^2 &= x^2 t^2 - 2xt \\ -2 - x &= xt^2 - 2t \\ x &= \frac{2t - 2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

odnosno

$$dx = \frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2(t-1)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2 - 2t^2 + 4t}{(1+t^2)^2} dt.$$

Kako je sada

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = \frac{1}{xt} = \frac{1}{t \cdot \frac{2t-2}{1+t^2}}$$

to je

$$I = \int \frac{1}{t \cdot \frac{2t-2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 - 2t^2 + 4t}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{1 - t^2 + 2t}{t(t-1)(1+t^2)} dt.$$

Primenom metode neodređenih koeficijentata dobijamo

$$\frac{1 + 2t - t^2}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}$$

odakle je

$$I = -\ln |t| + \ln |t-1| - 2\arctgt + C = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2\arctgt + C.$$

6.7 Integrali nekih trigonometrijskih funkcija

Ovde ćemo rešavati integrale oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

gde je sada R racionalna funkcija po $\sin x$ odnosno po $\cos x$. Ovakvi integrali svode se na integral racionalne funkcije smenom

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

odakle je

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

dok je

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Navedena smena se naziva *univerzalnom trigonometrijskom smenom*.

Primer 56

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$$

Porede univerzalne trigonometrijske smene, u posebnim slučajevima mogu se koristiti i druge smene i to

1. za $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$, smena je $\sin x = t$,
2. za $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$, smena je $\cos x = t$,
3. za $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, smena je $\operatorname{tg} x = t$,
4. za $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx$, smena je $\operatorname{tg} x = t$.

Primer 57

$$\begin{aligned} \int \sin^7 x \cos^5 x dx &= \int \sin^7 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^7 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \\ &= \int t^7 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^7 - 2t^9 + t^{11}) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^{10}}{5} + \frac{t^{12}}{12} + C = \\ &= \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{5} + \frac{\sin^{12} x}{12} + C \end{aligned}$$

Konačno kada su u pitanju integrali oblika

$$\int \sin ax \sin bxdx, \int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, a \neq b$$

tada se ne koriste navedene smene već trigonometrijski identiteti

$$\sin ax \sin bx = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)x - \cos(a-b)x]$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

kojima se ovi integrali praktično svode na tablične.

Primer 58

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin(-2x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} \right] + C \end{aligned}$$

6.8 Integrali još nekih transcendentnih funkcija

Integrali

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx, \int P(x) \sin ax dx, \int P(x) \cos ax dx$$

gde je $P(x)$ polinom, mogu se izračunati metodom parcijalne integracije stavljajući $P(x) = u$, $e^{\alpha x} dx = dv$, odnosno $\sin ax dx = dv$, odnosno $\cos ax dx = dv$. Formula parcijalne integracije se upotrebljava sve dok pod integralom ne iščezne polinom.

Primer 59

$$I = \int (x^2 - 3x + 5) \sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 5) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (2x - 3) \cos 2x dx$$

gde je

$$x^2 - 3x + 5 = u, \sin 2x dx = dv, (2x - 3) dx = du, -\frac{\cos 2x}{2} = v$$

i dalje

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 5) \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2x - 3) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$$

uz smenu

$$2x - 3 = u, \cos 2x dx = dv, 2dx = du, \frac{\sin 2x}{2} = v$$

da bismo konačno dobili

$$I = -\frac{x^2 - 3x + 5}{2} \cos 2x + \frac{2x - 3}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Integrali

$$\int x^n e^{ax} \sin bxdx, \int x^n e^{ax} \cos bxdx$$

mogu se rešiti primenom parcijalne integracije stavljajući $x^n = u$, a zatim $e^{ax} \sin bxdx = dv$, odnosno $e^{ax} \cos bxdx = dv$. Tom prilikom pojavljuje se problem izračunavanja

$$\int e^{ax} \sin bxdx, \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Primenom višestruke parcijalne integracije izračunaćemo

$$I = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Prvom parcijalnom integracijom dobijamo

$$I = \int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx$$

pri čemu je

$$e^{ax} = u, \sin bxdx = dv, ae^{ax} = du, -\frac{\cos bx}{b} = dv$$

pa zatim, primenjujući još jednu parcijalnu interaciju dobijamo

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b} e^{ax} \sin bxdx - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx$$

gde je

$$e^{ax} = u, \cos bxdx = dv, ae^{ax} = du, \frac{\sin bx}{b} = dv$$

i zatim

$$I = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \cdot I$$

odakle je

$$I + \frac{a^2}{b^2} \cdot I = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{b^2} e^{ax}$$

i konačno

$$I = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Analogno

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin ax}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Integrali

$$\int P(\ln x) x^n dx, \int P(\arcsin x) dx$$

gde je $P(x)$ polinom smenom $\ln x = t$ odnosno $\arcsin x = t$ svode se na

$$\int P(t) e^{(n+1)t} dt, \int P(t) \cos t dt$$

dakle integrale tipa koji je već rešen.

Primer 60

$$I = \int (\arcsin x)^2 dx = \int t^2 \cos t dt$$

gde je smena

$$\arcsin x = t, x = \sin t, dx = \cos t dt.$$

Dalje uz primenu parcijalne integracije, dobijamo

$$\begin{aligned} \int t^2 \cos t dt &= t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \int \cos t dt \\ &= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C \end{aligned}$$

6.9 Integrali koji se ne mogu izraziti preko elementarnih funkcija

Iako svaka neprekidna funkcija na intervalu (a, b) ima primitivnu funkciju, to ne znači da se njena primitivna funkcija može izraziti preko elementarnih funkcija. Dokazano je, na primer, da se integrali

$$\int e^{-x^2} dx \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad \int \sin x^2 dx \quad \int \cos x^2 dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \int \frac{\cos x}{x} dx$$

ne mogu izraziti u obliku elementarnih funkcija.