2 Realne funkcije jedne realne nezavisne promenljive

Funkcije koje preslikavaju skup realnih brojeva R u skup realnih brojeva R nazivaju se realnim funkcijama jedne realne nezavisne promenljive. Ovakve funkcije mogu biti zadate na različite načine. Na primer, funkcije mogu biti zadate *tabelarno*:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

ali i *grafički*, mada se najčešće zadaju *analitički* i to *eksplicitno* u obliku $y = f(x)$ odnosno *implicitno* kao $F(x, y) = 0$. Funkcija se može zadati i pomoću više analitičkih izraza:

$$x = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots & \\ f_k(x), & x \in D_k \end{cases}$$

pri čemu je $\forall(i, j) D_i \cap D_j = \emptyset$ pa je domen funkcije $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$.

Konačno, funkcije se mogu zadati i *parametarski.* Naime, sa $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ definiše jedna funkcija između promenljivih x i y, ali posredstvom parametra $t \in R$. Tako je, na primer, sa $x = acost$ i $y = asint$, $t \in [0, 2\pi)$ data parametarska jednačina kružnice poluprečnika a sa centrom u koordinatnom početku.

2.1 Nule funkcija

Vrednost x_0 za koju je $f(x_0) = 0$ zove se *nula funkcije* $y = f(x)$. Funkcija ne mora imati ni jednu nulu, a može ih imati i beskonačno mnogo.

2.2 Parnost funkcija

Funkcija je *parna* ako je $\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$.

Primer 5 *Funkcije* $y = |x|$, $y = x^2$, $y = -x^4$ *su parne.*

Grafik parne funkcije je osno simetričan u odnosu na y osu.

Funkcija je *neparna* ako je $\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)$.

Primer 6 *Funkcije* $y = x$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ *su neparne.*

Grafik neparne funkcije je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Funkcije ne moraju biti parne ili neparne, već mogu biti ni parne ni neparne.

Primer 7 *Funkcije $y = x + 1$, $y = e^x$ nisu ni parne ni neparne.*

2.3 Periodičnost funkcija

Ako za funkciju $f(x)$ postoji konstanta $p \neq 0$ takva da je

$$\forall x \in D \quad f(x+p) = f(x)$$

onda se kaže da je funkcija $f(x)$ *periodična* sa periodom p. Najmanji pozitivan period funkcije ω, zove se *osnovni period* funkcije. Ako su p i q periodi funkcije, onda je i $p+q$ period funkcije. Ako funkcija $y = f(x)$ ima period p, onda funkcija $y = f(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$ ima period $\frac{p}{\alpha}$.

Primer 8 *Funkcija $y = \sin x$ ima period $(2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi)$, a njen osnovni period je $\omega = 2\pi$. Funkcija $f(x) = c$ je specifičan slučaj, jer je njen period bilo koji realan broj, a pri tome je funkcija bez osnovnog perioda.*

2.4 Monotonost funkcija

Ako za svako x_1 i x_2 za koje je $x_1 < x_2$ važi $f(x_1) < f(x_2)$ onda se kaže da je funkcija $f(x)$ *monotono rastuća*, a ako važi $f(x_1) \leq f(x_2)$, onda je funkcija *monotono neopadajuća.*

Ako za svako x_1 i x_2 za koje je $x_1 < x_2$ važi $f(x_1) > f(x_2)$ onda se kaže da je funkcija $f(x)$ *monotono opadajuća*, a ako važi $f(x_1) \geq f(x_2)$, onda je funkcija *monotono nerastuća.*

2.5 Konveksnost (konkavnost) funkcija

Ako za svako x_1 i x_2 važi

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

funkcija je *konveksna* (ispupčena — $\cup$), a ako važi

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

funkcija je *konkavna* (udubljena — $\cap$).

Primer 9 *Funkcija $y = x^2$ je tipičan primer konveksne funkcije dok je funkcija $y = -x^2$ tipičan primer konkavne funkcije.*

2.6 Polarni koordinatni sistem

Sem u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, funkcija može biti zadata i u *polarnom koordinatnom sistemu.* Polarni koordinatni sistem čine jedna tačka O koja predstavlja *pol* i jedna polusa sa početkom u tački 0 koja predstavlja *polarnu osu.* Koordinate tačke M u polarnom koordinatnom sistemu su ρ, intenzitet vektora položaja tačke M, i θ, ugao koji taj vektor položaja zaklapa sa polarnom osom, pri čemu se uzima da je $0 \leq \theta < 2\pi$. Ako se pol poklopi sa koordinatnim početkom Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema a polarna osa sa pozitivnim delom Ox ose onda se koordinate (x, y) tačke M u Dekartovom koordinatnom sistemu mogu jednoznačno izraziti preko (ρ, θ) kao

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

2.7 Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su:

1. Stepene funkcije $y = x^\alpha$ $(\alpha \in R)$,
2. Eksponencijalne funkcije $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$,
3. Logaritamske funkcije $y = \log_a x$ $(a \neq 1, a > 0)$,
4. Trigonometrijske funkcije $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y =$tg x, $y =$ctg x,
5. Inverzne trigonometrijske funkcije $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y =$arctg$x$, $y =$arcctg x.

Elementarne funkcije u širem smislu su osnovne elementarne funkcije i funkcije koje nastaju od njih i konstanti konačnim brojem primena aritmetičkih operacija (+,-,*,/) i formiranjem složenih funkcija.

Primer 10 *Funkcija* $y = \cos(x + 3) + 2\sin(x^2)$ *predstavlja elementarnu funkciju u širem smislu.*