

5 Sistemi linearnih jednačina

U opštem slučaju, pod sistemom linearnih jednačina podrazumevamo sistem od m jednačina sa n nepoznatih

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

U sistemu su x_1, x_2, \dots, x_n nepoznate veličine, dok su a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ zadati koeficijenti, a b_i , $1 \leq i \leq m$ zadati slobodni članovi. Pri tome broj jednačina m i broj nepoznatih n mogu biti u bilo kom od odnosa $m < n$, $m = n$ ili $m > n$.

Pod rešenjem sistema linearnih jednačina podrazumevamo bilo koji skup od n brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koji za $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ identički zadovoljavaju sistem.

Sistem linearnih jednačina ne mora uvek imati rešenje. Npr. sistem

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

nema rešenja jer ne postoje brojevi koji mogu da ga zadovolje. Takođe, ukoliko sistem ima rešenje, to ne znači da mora imati samo jedno rešenje. Tako, npr. sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

ima beskonačno mnogo rešenja oblika $x = \alpha$, $y = 1 - \alpha$ gde je α proizvoljan broj. Za nepoznatu x se u ovom slučaju kaže da je slobodna a za y da je vezana. Uopšte, kada sistem linearnih jednačina ima više od jednog rešenja, onda je barem jedna nepoznata slobodna, što praktično znači da sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

Prema tome da li ima ili nema rešenja, i ukoliko ih ima, da li ima jedno jedino ili više rešenja, sistem linearnih jednačina može biti:

1. *određen*, ako ima samo jedno rešenje,
2. *neodređen*, ako ima više od jednog (beskonačno mnogo) rešenja,

3. *nemoguć* (protivrečan) ako nema rešenja.

Određeni i neodređeni sistemi se nazivaju jednim imenom *saglasnim* sistemima. Saglasan sistem, dakle, ima bar jedno rešenje. Ako su svi slobodni članovi sistema jednaki nuli:

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$$

sistem je *homogen*, u protivnom je *nehomogen*. Svaki homogen sistem je saglasan, jer ima bar jedno rešenje:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Ovo rešenje se naziva *trivijalnim* rešenjem. Ukoliko je homogen sistem određen, on ima samo trivijalno rešenje. Neodređen homogen sistem ima i rešenja koja su *netrivijalna*.

Primer 33 *Sistem*

$$x + y = 0$$

$$x - y = 0$$

ima samo trivijalno rešenje, dok sistem

$$x + y = 0$$

$$2x + 2y = 0$$

ima beskonačno mnogo rešenja oblika $x = \alpha$, $y = -\alpha$.

Dva sistema linearnih jednačina su *ekvivalentna* ako je svako rešenje jednog sistema istovremeno i rešenje drugog sistema i obrnuto.

Transformacije koje sistem linearnih jednačina prevode u njemu ekvivalentan sistem su

1. Zamena mesta dveju jednačina,
2. Množenje svih koeficijenata jedne jednačine konstantom $c \neq 0$,
3. Dodavanje koeficijenata jedne jednačine odgovarajućim koeficijentima neke druge jednačine.

Primer 34 *Dat je sistem*

$$2x + y - z = 2$$

$$-x + 2y + 3z = 4$$

$$x + y + z = 3$$

Zamenom mesta prve i treće jednačine dobija se ekvivalentan sistem

$$x + y + z = 3$$

$$-x + 2y + 3z = 4$$

$$2x + y - z = 2$$

Ako se koeficijenti prve jednačine najpre dodaju odgovarajućim koeficijentima druge jednačine, a potom se pomnože sa -2 i dodaju koeficijentima treće jednačine dobija se sistem:

$$x + y + z = 3$$

$$3y + 4z = 7$$

$$-y - 3z = -4$$

Zamenom mesta druge i treće jednačine dobija se:

$$x + y + z = 3$$

$$-y - 3z = -4$$

$$3y + 4z = 7$$

Množenjem koeficijenata druge jednačine sa 3 i njihovim dodavanjem na koeficijente treće jednačine dobija se sistem ekvivalentan polaznom:

$$x + y + z = 3$$

$$-y - 3z = -4$$

$$-5z = -5$$

5.1 Gausov postupak eliminacije

Gausov postupak (metoda) eliminacije je postupak kojim se može rešavati bilo koji sistem jednačina $m < n$, $m = n$, $m > n$. U Gausovom postupku pretpostavlja se da je $a_{11} \neq 0$. Naime, ako u konkretnom sistemu u prvoj jednačini koeficijent uz x_1 ne bi bio različit od nule u sistemu mora postojati bar jedna jednačina u kojoj je koeficijent uz x_1 različit od nule, i onda se ta jednačina i prva jednačina zamene, čime se dobija ekvivalentan sistem u kome je $a_{11} \neq 0$.

Ako se sada prva jednačina подели sa a_{11} dobije se ekvivalentan sistem

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Ako se sada prva jednačina ovog sistema pomnoži sa $-a_{21}$ i doda drugoj jednačini, a zatim pomnoži sa $-a_{31}$ i doda trećoj jednačini i tako redom, dobija se novi ekvivalentni sistem

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21})x_3 + \dots + (a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21})x_n = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}$$

⋮

$$(a_{m2} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{m1})x_2 + (a_{m3} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{m1})x_3 + \dots + (a_{mn} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{m1})x_n = b_m - \frac{b_1}{a_{11}}a_{m1}$$

odnosno, ako uvedemo nove oznake

$$\frac{a_{1j}}{a_{11}} = a'_{1j} \quad j = 2, \dots, n \quad \frac{b_1}{a_{11}} = b'_1$$

$$a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}a_{i1} = a'_{ij} \quad i = 2, \dots, m \quad j = 2, \dots, n$$

$$b_i - \frac{b_1}{a_{11}}a_{i1} = b'_i \quad i = 2, \dots, m$$

dobijamo sistem

$$x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

⋮

$$a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m$$

u kome je samo u prvoj jednačini koeficijent uz x_1 različit od nule. Drugim rečima, nepoznata x_1 eliminisana je iz svih jednačina počev od druge pa nadalje.

Mi možemo dalje pretpostaviti da je $a'_{22} \neq 0$. Ako to ne bi bio slučaj, onda se, kao i u prethodnom koraku, traži jednačina u kojoj je koeficijent uz

x_2 različit od nule. Potom se zamenom mesta te jednačine i druge jednačine postigne da bude $a'_{22} \neq 0$. Može se, međutim, desiti i da svi koeficijenti uz x_2 budu jednaki 0, odnosno da važi $a'_{i2} = 0$, $i = 2, \dots, m$. U tom slučaju proverava se da li postoji bar jedan koeficijent $a'_{ij} \neq 0$, $j \in \{3, \dots, n\}$, $i \in \{2, \dots, m\}$, odnosno da li postoji koeficijent uz neku promenljivu x_j , za $j > 2$, u nekoj, i -toj jednačini ($i \geq 2$), koji je različit od 0, u kom slučaju sada promenljive x_2 i x_j mogu zameniti mesta tako da opet bude $a'_{22} \neq 0$. Poslednja mogućnost je da su svi koeficijenti a'_{ij} , $i = 2, \dots, m$, $j = 2, \dots, n$ jednaki nuli, odnosno da se sistem sveo na:

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ 0 &= b'_2 \\ &\vdots \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

U ovom, poslednjem slučaju Gausov postupak se završava. Iz ovako dobijenog sistema jasno je da on može biti saglasan ako i samo ako su svi slobodni koeficijenti $b'_i = 0$, $i = 2, \dots, m$. U tom slučaju sistem se praktično svodi na jednu jednačinu sa n nepoznatih, što znači da dobijeni sistem, pa samim tim i njemu ekvivalentan polazni sistem, predstavlja sistem sa beskonačno mnogo rešenja. Pri tome je $n - 1$ nepoznatih slobodno, a jedna nepoznata je vezana. Ako je, pak, bar jedan od slobodnih koeficijenata $b'_i \neq 0$, dobijeni sistem, a time i polazni, je nemoguć.

Vratimo se sada na pretpostavku da je $a'_{22} \neq 0$. U tom slučaju deljenjem druge jednačine sa a'_{22} dobija se ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \dots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n &= \frac{b'_2}{a'_{22}} \\ &\vdots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Dalje, ako se druga jednačina množi redom sa $-a'_{i2}$ i dodaje i -toj jednačini $i = 3, \dots, m$, dobija se ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \dots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n &= \frac{b'_2}{a'_{22}} \\
(a'_{33} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}a'_{32})x_3 + \dots + (a'_{3n} - \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}a'_{32})x_n &= b_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{32} \\
&\vdots \\
(a'_{m3} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}a'_{m2})x_3 + \dots + (a'_{mn} - \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}a'_{m2})x_n &= b_3 - \frac{b'_m}{a'_{22}}a'_{m2}
\end{aligned}$$

odnosno ako se uvedu nove oznake

$$\begin{aligned}
\frac{a'_{2j}}{a'_{22}} &= a''_{2j} \quad j = 3, \dots, n & \frac{b'_2}{a'_{22}} &= b''_2 \\
a'_{ij} - \frac{a'_{2j}}{a'_{22}}a'_{i2} &= a''_{ij} \quad i = 3, \dots, m \quad j = 3, \dots, n \\
b'_i - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{i2} &= b''_i \quad i = 3, \dots, m
\end{aligned}$$

dobija se sistem

$$\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\
a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a''_{m3}x_3 + \dots + a''_{mn}x_n &= b''_m
\end{aligned}$$

Ovaj sistem ekvivalentan je sa polaznim sistemom, a u njemu je sada promenljiva x_2 eliminisana iz svih jednačina počev od treće jednačine pa nadalje. Daljim sprovođenjem analognog postupka eliminacije nepoznatih x_3, x_4, \dots postupak će se završiti na ekvivalentnom sistemu koji ima oblik

$$\begin{aligned}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1k}x_k + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2k}x_k + \dots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\
x_3 + \dots + a'''_{3k}x_k + \dots + a'''_{3n}x_n &= b'''_3 \\
&\vdots \\
x_m + \dots + a^{(m)}_{mn}x_n &= b^{(m)}_m
\end{aligned}$$

koji je uvek saglasan, ili na sistemu čiji je oblik

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1k}x_k + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2k}x_k + \dots + a''_{2n}x_n &= b''_2 \\ x_3 + \dots + a'''_{3k}x_k + \dots + a'''_{3n}x_n &= b'''_3 \\ &\vdots \\ x_k + \dots + a^{(k)}_{kn}x_n &= b^{(k)}_k \\ 0 &= b^{(k)}_{k+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b^{(k)}_m \end{aligned}$$

pri čemu je $k < m$, a koji je saglasan ako i samo ako je $b_i^{(k)} = 0$ za sve vrednosti $i = k + 1, \dots, m$, dok je u protivnom nemoguć. U slučaju kada je ovaj sistem saglasan, on ima praktično isti oblik kao i prethodni, pa ćemo nadalje razmatrati samo ovaj prethodni.

Ako se radi o saglasnom sistemu i ako je pri tome $m = n$ (odnosno $k = n$), u kom slučaju se poslednja jednačina svodi na

$$x_n = b_n^{(n)}$$

onda sistem *ima jedinstveno rešenje*. Vrednosti koje čine ovo rešenje se dobijaju tako što se vrednost za x_n dobije iz poslednje jednačine a zatim uvrsti u pretposlednju jednačinu, pa se odatle izračuna vrednost za x_{n-1} . Postupak se nastavlja analogno sve do prve jednačine u kojoj se izračunava x_1 na osnovu već izračunatih vrednosti x_n, x_{n-1}, \dots, x_2 .

Ako je sistem saglasan a pri tome je $m < n$ (odnosno $k < n$), onda sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Sve nepoznate $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ su slobodne, odnosno mogu imati proizvoljne vrednosti, dok su nepoznate x_1, x_2, \dots, x_m vezane, odnosno izražavaju se u funkciji slobodnih nepoznatih.

Gausovom metodom se, prema tome:

1. utvrđuje da li je sistem saglasan ili nemoguć i
2. u slučaju saglasnog sistema dobijaju se rešenja sistema.

5.2 Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću determinanti

Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću determinanti moguće je samo ukoliko je broj jednačina jednak broju nepoznatih, odnosno, ako je $m = n$.

Sistem je u tom slučaju

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Matrica koju formiraju koeficijenti uz nepoznate a_{ij}

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se naziva *matricom sistema* a njena determinanta

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantom sistema.

Za rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću determinanti, pored determinante sistema, koristi se još n determinanti D_k , $k = 1, \dots, n$ koje se dobijaju tako što se u determinanti D_s , k -ta kolona zameni kolonom slobodnih članova.

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Primena determinanti za rešavanje sistema linearnih jednačina praktično se zasniva na sledećoj teoremi:

Teorema 2 *Neka sistem n linearnih jednačina sa n nepoznatih ima bar jedno rešenje. Tada, za svako rešenje sistema*

$$x_1 = \alpha_1 \quad x_2 = \alpha_2 \quad \dots \quad x_n = \alpha_n$$

važe jednakosti

$$\alpha_k \cdot D_s = D_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Dokaz 5 Pomnožimo determinantu D_s sa α_k i to tako što pomnožimo upravo njenu k -tu kolonu:

$$\alpha_k \cdot D_s = \alpha_k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \alpha_k a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \alpha_k a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha_k a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

U dobijenoj determinanti pomnožimo prvu kolonu sa α_1 , pa je dodamo k -toj koloni, zatim drugu kolonu sa α_2 , pa i nju dodamo k -toj koloni, i tako redom do n -te kolone koju pomnožimo sa α_n i dodamo takođe k -toj koloni, tako da konačno dobijemo

$$\alpha_k \cdot D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kako je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rešenje sistema, to je

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n &= b_n \end{aligned}$$

pa je

$$\alpha_k \cdot D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_k$$

što je i trebalo dokazati.

Ako je, dakle, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rešenje sistema i $D_s \neq 0$, odnosno matrica sistema je regularna, onda je

$$\alpha_k = \frac{D_k}{D_s}$$

Za sisteme jednačina u kojima je broj jednačina jednak broju nepoznatih važi tzv. *Kramerovo pravilo*: Ako je matrica sistema regularna, odnosno ako

je $D_s \neq 0$, onda je sistem određen, odnosno, saglasan je i ima jedinstveno rešenje

$$x_k = \frac{D_k}{D_s} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Sa druge strane, ako je matrica sistema singularna, odnosno ako je $D_s = 0$, a bar jedna od determinanti $D_k \neq 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, onda je sistem nemoguć. Naime, ako bi sistem imao rešenje pri $D_s = 0$ i $D_k \neq 0$ za neko k , onda bi važio

$$D_k = \alpha_k \cdot D_s = 0$$

što protivreči uslovu $D_k \neq 0$.

Ukoliko je $D_s = 0$ i $D_k = 0$ $k = 1, 2, \dots, n$ onda sistem sigurno nije određen, ali preostaju dve druge mogućnosti: da je sistem neodređen (ima beskonačno mnogo rešenja) ili da je nemoguć (nema rešenja), ali se do rešenja sistema u ovom slučaju ne može doći pomoću determinanti.

Konačno, ako je u pitanju homogen sistem jednačina, odnosno sistem u kome su slobodni koeficijenti $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, onda će uvek biti $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$ jer svaka od ovih determinanti sadrži jednu kolonu u kojoj se nalaze slobodni koeficijenti, odnosno same nule. Kako je, sa druge strane, homogen sistem uvek saglasan, to znači da za $D_s \neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje, a to je trivijalno rešenje, dok je za $D_s = 0$ sistem neodređen, odnosno ima beskonačno mnogo rešenja.

5.3 Matrične jednačine

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

može se izraziti u obliku matrične jednačine

$$A \cdot X = B$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrica sistema, dok su X i B vektori kolone

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ako je sistem kvadratan ($m = n$), a matrica sistema A regularna ($\det A \neq 0$), onda za nju postoji inverzna matrica A^{-1} , pa se rešenje matrice jednačine može dobiti na sledeći način

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1}B$$

5.4 Kroneker-Kapelijeva teorema

Za sistem linearnih jednačina

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

čija je matrica sistema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

može se formirati i sledeća matrica

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

koja se naziva *proširenom matricom sistema*.

Teorema 3 (Kroneker-Kapeli) *Sistem linearnih jednačina je saglasan ako i samo ako je*

$$r = \text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$$

odnosno ako je rang matrice sistema r jednak rangu proširene matrice sistema.

Za saglasne sisteme važi:

1. Ako je rang matrice A sistema $r = n$ (pri čemu mora biti $n \leq m$) onda sistem ima jedinstveno rešenje.
2. Ako rang matrice A sistema $r < n$ onda sistem ima beskonačno mnogo rešenja pri čemu je $n - r$ nepoznatih slobodno, a r ih je vezano (zavisno od slobodnih nepoznatih).

Na osnovu Kroneker-Kapelijsve teoreme direktno sledi da je svaki homogeni sistem saglasan jer se matrica sistema proširuje kolonom slobodnih koeficijenata čije su vrednosti same nule pa se ovakvim proširenjem rang matrice ne može povećati, odnosno $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$.

5.5 Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice

Za kvadratne matrice mogu se definisati sopstveni vektori i sopstvene vrednosti. Naime, svaka matrica kolona (vektor)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

naziva se *sopstveni vektor* kvadratne matrice A reda n ako postoji skalar λ takav da je

$$A \cdot X = \lambda X$$

U tom slučaju se skalar λ naziva *sopstvena vrednost* matrice A koja odgovara sopstvenom vektoru X .

Jednačina

$$A \cdot X = \lambda X$$

može da se napiše i kao

$$A \cdot X - \lambda X = 0$$

odnosno

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0$$

Kako je matrica

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

to matricnoj jednačini

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0$$

odgovara homogeni sistem jednačina

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= b_n \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

predstavlja polinom po λ i naziva se *karakterističnim polinomom* matrice A . Odgovarajuća algebarska jednačina

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

naziva se *karakterističnom jednačinom* matrice A .

Iz načina formiranja karakterističnog polinoma sledi da rešenja karakteristične jednačine predstavljaju sopstvene vrednosti matrice A , a zamenom sopstvenih vrednosti u sistem

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0$$

dobijaju se odgovarajući sopstveni vektori matrice A .

Primer 35 Za zadatau matricu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

karakteristični polinom se dobija rešavanjem determinante

$$A = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

odakle sledi karakteristična jednačina

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0$$

Rešenja ove jednačine su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ i ona predstavljaju sopstvene vrednosti matrice A . Za sopstvenu vrednost $\lambda_1 = 1$ dobija se homogeni sistem

$$2x + y - z = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

$$-x + y + 2z = 0$$

čija su rešenja oblika $(\alpha, -\alpha, \alpha)$. Odavde sa sopstveni vektor za $\lambda_1 = 1$ može dobiti izborom proizvoljne vrednosti $\alpha \neq 0$, recimo $\alpha = 1$, u kom slučaju je odgovarajući sopstveni vektor

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ imamo sistem

$$-x + y - z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$-z + y - z = 0$$

čija su rešenja $(\alpha - \beta, \alpha, \beta)$, odakle se za $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ dobija sopstveni vektor

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a za $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ sopstveni vektor

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$