3 Polinomi

Izraz oblika

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

u kome su $\{a_i\}$ konstante, a x neka promeljiva vrednost, predstavlja *polinom po* x.

Ako je $a_n \neq 0$ i $n \geq 1$, polinom P_n je polinom n-tog stepena. Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ i $a_0 \neq 0$, onda je P_n polinom nultog stepena. Ako je $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ odnosno $P_n(x) \equiv 0$, onda je P_n *nula polinom.*

Dva polinoma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

i

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

su jednaka ako i samo ako su istog stepena i imaju iste koeficijente, odnosno ako je $n = m$ i $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Broj x_0 za koji je $P_n(x_0) = 0$, naziva se *nula* ili *koren* polinoma $P_n(x)$. Jednačina $P_n(x) = 0$ je *algebarska jednačina* n-tog stepena i njena rešenja su nule polinoma $P_n(x)$.

Za svaka dva polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ $n \geq m$ postoje polinomi $S_k(x)$ i $R_l(x)$ takvi da je $P_n(x) = Q_m(x) \cdot S_k(x) + R_l(x)$ pri čemu je $l < m$ ili je $R_l(x) \equiv 0$, a $k + m = n$. Polinom $S_k(x)$ je rezultat deobe polinoma $P_n(x)$ polinomom $Q_m(x)$ a $R_l(x)$ je *ostatak* pri deobi polinoma $P_n(x)$ polinomom $Q_m(x)$.

Bezuov stav: Pri deobi polinoma $P_n(x)$ polinomom prvog stepena $x - a$ ostatak je jednak $P(a)$.

Posledica Bezuovog stava: Ako je a nula polinoma, onda je polinom $P_n(x)$ deljiv polinomom $x - a$ bez ostatka, pa je

$$P_n(x) = a_n Q_{n-1}(x) \cdot (x - a)$$

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma, tada je

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Ako je

$$P_n(x) = a_n(x - a)^k \cdot Q_m(x)$$

tada je a nula k-tog reda polinoma.

Primer 22

1. *Za polinom*

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$$

$x = 2$ je nula drugog reda, a $x = 1$ nula prvog reda.

2. *Za polinom*

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x-i)^2(x+i)^2$$

$x = i$ i $x = -i$ su nule drugog reda.

Osnovni stav algebre: Svaki polinom reda $n \geq 1$ ima n (realnih ili kompleksnih, ne obavezno različitih među sobom) nula $x_1, x_2, \ldots x_n$. To praktično znači da se nula k-tog reda računa kao k (istih) nula.

Vietove formule: Između koeficijenata polinoma $\{a_i\}$ i nula polinoma $\{x_k\}$ važe sledeće jednakosti:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$

$(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n) + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$\vdots$

$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Primer 23 *Vietove formule za polinom drugog stepena $P(x) = ax^2 + bx + c$ čije su nule x_1 i x_2 glase:*

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1x_2 = \frac{c}{a}$

a za polinom trećeg stepena $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ čije su nule x_1, x_2 i x_3:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

Ako su svi koeficijenti $\{a_i\}$ polinoma $P_n(x)$ realni, a polinom ima kompleksnu nulu $\alpha + i\beta$ reda k, tada je i $\alpha - i\beta$ kompleksna nula tog polinoma reda k. Drugim rečima, kod polinoma sa realnim koeficijentima, kompleksne nule se javljaju u parovima: kao kompleksan broj z i njemu konjugovano kompleksan broj $\overline{z}$.

Svaki polinom n-tog stepena sa realnim koeficijentima može da se faktorizuje, odnosno napiše u obliku

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \ldots (x-x_i)^{k_i}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2} \ldots (x^2+b_jx+c_j)^{l_j}$$

gde je $k_1 + k_2 + \ldots + k_i + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_j) = n$ pri čemu su

$$a_n, x_1, x_2, \ldots, x_i, b_1, b_2, \ldots, b_j, c_1, c_2, \ldots, c_j$$

realni brojevi, a polinomi $x^2 + b_j x + c_j$ nemaju realnih nula. Naime svakoj nuli k-tog reda a odgovaraće jedan faktor oblika $(x-a)^k$ a svakom paru konjugovano kompleksnih nula k-tog reda $\alpha \pm i\beta$ faktor oblika $(x^2 + bx + c)^k$ gde su $\alpha \pm i\beta$ kompleksna rešenja kvadratne jednačine $x^2 + bx + c = 0$.

Primer 24 *Naći polinom $S(x)$ i $R(x)$ tako da je*

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

gde je $P(x) = x^4 + 3x^3 + x - 1$ i $Q(x) = x^2 - 1$.

$$\begin{array}{l}
x^4 + 3x^3 + x - 1 : x^2 - 1 = x^2 + 3x + 1 \\
\underline{-x^4 + x^2} \\
3x^3 + x^2 + x \\
\underline{-3x^3 + + x} \\
x^2 + 4x - 1 \\
\underline{-x^2 + 1} \\
4x
\end{array}$$

$$S(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$R(x) = 4x$$

$$x^4 + 3x^2 + x - 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 1) + 4x$$

Primer 25 *Naći nule polinoma*

$$P_5(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

Lako se vidi da je $P_5(1) = 0$, pa je $x_1 = 1$, odnosno

$$x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = (x-1)Q_4(x),$$

gde se $Q_4(x)$ dobija deljenjem polinoma $P_5(x)$ sa $x - 1$:

$$Q_4(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

Uočavamo i da je $Q_4(1) = 0$, pa je $x_2 = 1$ nula polinoma $Q_4(x)$, odnosno

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x-1)R_3(x)$$

ili

$$x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2 R_3(x)$$

Dalje dobijamo da je $R_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, *a kako se vidi da je* $R_3(2) = 0$, *to je* $x_3 = 2$ *nula polinoma, pa je*

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2) S_2(x)$$

pri čemu je $S_2(x) = x^2 + 1$. *Prema tome:*

$$x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2 (x-2)(x^2+1)$$

Nule su $x_{1,2} = 1$ *(dvostruka),* $x_3 = 2$ *(jednostruka), dok su preostale dve konjugovano kompleksne* $x_{4,5} = \pm i$.