

6 Analitička geometrija

6.1 Vektori

Svaki vektor određen je svojim *pravcem*, *smerom* i *intenzitetom*. Naime, ako je data neka prava p i na njoj dve tačke A i B , onda je A početna tačka a B krajnja tačka vektora \overrightarrow{AB} . *Pravac* vektora \overrightarrow{AB} određen je pravom p (koja se naziva i *nosač* vektora), a njegov *smer* je od tačke A do tačke B . Konačno, *intenzitet* vektora \overrightarrow{AB} jednak je mernom broju duži \overline{AB} . Vektor \overrightarrow{AB} može da se označi i sa \vec{a} , a njegov intenzitet sa $|\vec{a}|$ odnosno $|\vec{a}|$ ili samo a . Važi $|\vec{a}| \geq 0$, s tim što ako je intenzitet vektora jednak 0, onda se taj vektora naziva *nula-vektorom* i označava sa $\vec{0}$. Nula-vektor je jedini vektor čiji su pravac i smer su proizvoljni.

Vektor \vec{a} čiji intenzitet $|\vec{a}| = 1$, naziva se *jediničnim vektorom* ili *ortom*.

Definicija 22 Dva vektora su međusobno jednaka ako imaju isti pravac, smer i intenzitet.

Napomena: Vektori imaju isti pravac ako su prave koje su im nosači paralelne ili se poklapaju. Vektori koji imaju isti pravac se nazivaju *kolinearnim* vektorima, što znači da su kolinearni vektori istog smera i intenziteta međusobno jednaki. Prema tome, dva jednaka vektora se ne moraju nalaziti na istom položaju u prostoru, već se mogu nalaziti na različitim, paralelnim pravama. Odavde sledi da se vektor ne menja ako se u prostoru pomera translatorno, odnosno tako da zadržava isti pravac i smer.

Definicija 23 Proizvod skalara (broja) $m \neq 0$ i vektora \vec{a} je vektor $\vec{b} = m\vec{a}$ čiji je pravac jednak pravcu vektora \vec{a} , dok je smer jednak smeru vektora \vec{a} ako je $m > 0$, a suprotan smeru vektora \vec{a} ako je $m < 0$. Intenzitet vektora $|\vec{b}| = |m| \cdot |\vec{a}|$.

Proizvod skalara 0 i vektora \vec{a} , $0 \cdot \vec{a}$ jednak je nula-vektoru. Proizvod skalara -1 i vektora \vec{a} , $-1 \cdot \vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$ koji je istog pravca i intenziteta kao vektor \vec{a} , ali ima suprotan smer.

Ako su vektori \vec{a} i \vec{b} kolinearni onda uvek postoji skalar m takav da je:

$$\vec{a} = m \cdot \vec{b}$$

Definicija 24 Zbir dva vektora \vec{a} i \vec{b} je vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ koji se dobija tako što se vektor \vec{b} translatornim pomeranjem dovede u takav položaj da se njegov početak poklopi sa krajem vektora \vec{a} , pa je vektor \vec{c} vektor čiji se početak poklapa sa početkom vektora \vec{a} , a kraj sa krajem vektora \vec{b} .

Ako su A , B i C tri tačke u prostoru, onda je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Sabiranje vektora ima sledeće osobine

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Sabiranje vektora i množenje vektora skalarom zadovoljavaju sledeće osobine:

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$
- $(m + n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a}$

Razlika dva vektora \vec{a} i \vec{b} svodi se na zbir vektora \vec{a} i vektora $-\vec{b}$. Podsetimo da je vektor $-\vec{b}$ jednak vektoru \vec{b} po intenzitetu i pravcu, ali mu je smer suprotan smeru vektora \vec{b} .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Definicija 25 Skalarni proizvod dva vektora \vec{a} i \vec{b} se označava sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i predstavlja skalar (broj) koji se dobija na sledeći način

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

pri čemu je α ugao između vektora \vec{a} i vektora \vec{b} .

Za skalarni proizvod važe sledeće osobine

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$

Iz ove poslednje osobine sledi da je

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Ako \vec{a} i \vec{b} nisu nula vektori iz definicije skalarnog proizvoda sledi da je $\cos \alpha$, gde je α ugao između ova dva vektora, jednak:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Pomoću skalarnog proizvoda može se ispitati da li su dva vektora \vec{a} i \vec{b} međusobno normalna. Naime, kako je kosinus pravog ugla jednak 0, to su vektori \vec{a} i \vec{b} koji su različiti od 0 normalni ako i samo ako im je skalarni proizvod jednak nuli.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Definicija 26 Vektorski proizvod dva vektora \vec{a} i \vec{b} je vektor \vec{c} sa sledećim osobinama:

1. Intenzitet vektora \vec{c} je jednak $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ gde je ugao α između vektora \vec{a} i \vec{b} .
2. Pravac vektora \vec{c} je normalan na ravan određenu vektorima \vec{a} i \vec{b} , odnosno, $\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$.
3. Smer vektora \vec{c} se određuje tako da vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} formiraju desni triedar.

Napomena: Ako su vektori \vec{a} i \vec{b} kolinearni, onda njima nije određena jedinstvena ravan, pa stoga nije moguće odrediti pravac i smer njihovog vektorskog proizvoda. Međutim, sinus ugla između kolinearnih vektora je uvek jednak 0, odakle je i intenzitet njihovog vektorskog proizvoda jednak 0, što znači da je vektorski proizvod kolinearnih vektora $\vec{0}$, koji kao što smo videli ima proizvoljan pravac i smer.

Kao što se pomoću skalarnog proizvoda može ispitati da li su dva vektora \vec{a} i \vec{b} međusobno normalna, tako se pomoću vektorskog proizvoda može ispitati da li su dva vektora međusobno kolinearna. Naime, vektori \vec{a} i \vec{b} koji su različiti od 0 su kolinearni ako i samo ako im je vektorski proizvod nula-vektor.

Za vektorski proizvod $\vec{a} \times \vec{b}$ važe sledeće osobine

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Kao što se vidi iz prve osobine, vektorski proizvod nije komutativan. Naime, ako vektori koji formiraju vektorski proizvod promene mesta, rezultujući vektor menja smer.

Vektorski proizvod ima i svoju geometrijsku interpretaciju. Naime, ako se nad vektorima \vec{a} i \vec{b} konstruiše paralelogram, njegova površina biće jednaka intenzitetu vektorskog proizvoda vektora \vec{a} i \vec{b} .

Naime, ovaj paralelogram ima osnovicu $a = |\vec{a}|$ a odgovarajuća visina jednaka je $h_a = |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$, odakle je

$$P = a \cdot h_a = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Definicija 27 *Mešoviti proizvod tri vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} je skalar*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Za mešoviti proizvod važi sledeća osobina

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Za tri vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} kažemo da su *komplanarni*, ako postoji ravan kojoj su sva tri vektora paralelna. Posebno, vektori su komplanarni ako leže u istoj ravni. Vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} su komplanarni ako i samo ako je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

Naime, ako su \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} komplanarni, tada je $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$ pa je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Sa druge strane, ako je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ onda je ili $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$ ili je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. U prvom slučaju, kako je skalarni proizvod vektora $(\vec{a} \times \vec{b})$ i vektora \vec{c} jednak nuli, sledi da je $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, a kako je po definiciji vektorskog proizvoda $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ to je $(\vec{a} \times \vec{b})$ istovremeno normalan na tri vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} što znači da su ta tri vektora komplanarna. U drugom slučaju, kada je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, to znači da su vektori \vec{a} i \vec{b} kolinearni, pa onda vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} moraju biti komplanarni.

Ako se nad vektorima \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} konstruiše paralelepiped, njegova zapremina je jednaka

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Naime, zapremina ovog paralelepipeda je

$$V = B \cdot H$$

čija je osnovica paralelogram konstruisan nad vektorima \vec{a} i \vec{b} , odakle je $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Sa druge strane je $H = |\vec{c}| \cdot \cos \alpha$ gde je α manji ugao između pravca određenog vektorima $\vec{a} \times \vec{b}$ i pravca određenog vektorom \vec{c} . Odatle je

$$\cos \alpha = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|}$$

odnosno

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Zapremina paralelepipeda je, prema tome

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

6.2 Vektori u koordinatnom sistemu

Neka su \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} jedinični, uzajamno normalni vektori koji čine desni triedar, i neka su Ox , Oy i Oz ose određene ovim vektorima. Vektori \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} nazivaju se *ortovima koordinatnih osa*. Proizvoljan vektor \vec{a} može se na jednoznačan način izraziti kao linearna kombinacija vektora \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} , dakle kao zbir tri vektora od kojih svaki ima pravac jedne od koordinatnih osa.

Naime, vektor \vec{a} može uvek da se postavi tako da mu je početak u koordinatnom početku O , odnosno da je $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, gde tačka M ima koordinate (x, y, z) . Ako je M' normalna projekcija tačke M na ravan Oxy a M'' normalna projekcija tačke M' na osu Ox , onda je

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM''} + \overrightarrow{M''M'} + \overrightarrow{M'M}$$

Vektor $\overrightarrow{OM''}$ kolinearan je sa vektorom \vec{i} i iz načina na koji je formiran sledi da je njegov intenzitet jednak x koordinati tačke M . Kako je ovaj vektor, pri tome, kolinearan sa vektorom \vec{i} , sledi da je $\overrightarrow{OM''} = x\vec{i}$. Potpuno analogno, vektor $\overrightarrow{M''M'}$ koji je kolinearan sa vektorom \vec{j} jednak je $\overrightarrow{M''M'} = y\vec{j}$, a vektor $\overrightarrow{M'M}$ kolinearan sa vektorom \vec{k} jednak je $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$, pa je

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Za vektor $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ kažemo da ima koordinate x , y i z i pišemo

$$\vec{a} = (x, y, z)$$

pri čemu treba naglasiti da su vrednosti koordinata vektora \vec{a} jednake koordinatama tačke M .

Ako su vektori zadati svojim koordinatama, onda se i operacije sa vektorima mogu izraziti preko koordinata

1. Množenje vektora skalarom daje

$$m\vec{a} = m(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = mx\vec{i} + my\vec{j} + mz\vec{k}$$

odakle je $m\vec{a} = (mx, my, mz)$. Drugim rečima, vektora zadat koordinatama se množi skalarom tako što mu se svaka koordinata pomnoži sa vrednošću tog skalara.

2. Kada je u pitanju sabiranje vektora $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, odnosno $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i vektora $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, odnosno $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, dobijamo

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

odnosno $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, što znači da se koordinate vektora koji predstavlja zbir dva vektora dobijaju sabiranjem odgovarajućih koordinata ta dva vektora. Analogno, koordinate vektora koji predstavlja razliku dva vektora dobijaju se kao razlika odgovarajućih koordinata ta dva vektora.

3. Za skalarani proizvod dva vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ dobijamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$x_1x_2\vec{i} \cdot \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \cdot \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \cdot \vec{k} + x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + y_1x_2\vec{j} \cdot \vec{i} + x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \cdot \vec{i} + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} + z_1y_2\vec{k} \cdot \vec{j}$$

odnosno, kako je, zbog ortogonalnosti vektora \vec{i} , \vec{j} i \vec{k}

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

ostaje samo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2|\vec{i}|^2 + y_1y_2|\vec{j}|^2 + z_1z_2|\vec{k}|^2$$

Kako su, dalje, \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} jedinični vektori, to je

$$|\vec{i}|^2 = |\vec{j}|^2 = |\vec{k}|^2 = 1$$

pa je konačno

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

odnosno skalarni proizvod dva vektora jednak je zbiru proizvoda odgovarajućih koordinata ta dva vektora.

Odavde je, za $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, skalarni proizvod vektora sa samim sobom jednak

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = xx + yy + zz$$

odnosno, kako je

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2$$

sledi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4. Kosinus ugla između dva vektora, takođe se može izračunati pomoću njihovih koordinata. Naime, kako je $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ gde je $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ to je

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

5. Za vektorski proizvod dobija se

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{i} \times \vec{i} + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} + z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + \\ &+ x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + y_1y_2\vec{j} \times \vec{j} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} + \\ &+ x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + y_1z_2\vec{j} \times \vec{k} + z_1z_2\vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

Međutim, kako su vektori \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} međusobno ortogonalni vektori i formiraju desni triedar, to je

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned}$$

pa je, prema tome,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -y_1x_2\vec{k} + z_1x_2\vec{j} + x_1y_2\vec{k} - z_1y_2\vec{i} - x_1z_2\vec{j} + y_1z_2\vec{i}$$

odnosno

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

Ovo može da se predstavi i pomoću determinanti kao

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

odnosno

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

pri čemu ova poslednja determinanta i nije determinata u pravom smislu te reči, budući da sadrži i skalare i vektore, već je njen smisao isključivo da posluži za to da se njenim razvijanjem po prvoj vrsti dobije vektorski proizvod.

6. Kako je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

to se za mešoviti proizvod vektora \vec{a} , \vec{b} i $\vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$ dobija

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) x_3 + (z_1 x_2 - x_1 z_2) y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) z_3$$

što se može predstaviti i pomoću determinanti kao

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

odnosno kao determinanta (u ovom slučaju "prava")

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Već smo videli da se pomoću vektorskog proizvoda može utvrditi da li su dva vektora kolinearna. Međutim, za vektore date preko koordinata, to se može ustanoviti i znatno jednostavnije. Naime, ako su vektori $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ međusobno kolinearni, tada, kao što smo već konstatovali, postoji skalar m takav da je

$$\vec{a} = m\vec{b}$$

odnosno

$$\vec{a} = (mx_2, my_2, mz_2)$$

iz čega sledi

$$x_1 = mx_2 \quad y_1 = my_2 \quad z_1 = mz_2$$

odnosno

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Prema tome, dva vektora su kolinearna ako su im koordinate proporcionalne.

Primer 36 Ako su uglovi koje vektor $\vec{a} = (x, y, z)$ zaklapa sa koordinatnim osama redom $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$ i $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$ tada je

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Naime, kako su vektori $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$, to je

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

Primer 37 Odrediti zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima

$$\vec{a} = (3, 2, -1) \quad \vec{b} = (1, 4, -2) \quad \vec{c} = (4, 5, -3)$$

kao i visinu koja odgovara strani određenoj vektorima \vec{a} i \vec{b} .

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) = -5$$

$$V = |-5| = 5$$

$$H = \frac{V}{B} \quad V = 5 \quad B = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 5, 10) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$H = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Primer 38 Neka su α , β i γ uglovi koje neki vektor $\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ zaklapa, respektivno, sa koordinatnim osama Ox , Oy i Oz , odnosno vektorima \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} . Ako vektor \vec{n} skalarno pomnožimo redom sa \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} dobijamo:

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = x \quad \vec{n} \cdot \vec{j} = y \quad \vec{n} \cdot \vec{k} = z$$

odnosno

$$x = \vec{n} \cdot \vec{i} = |\vec{n}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos \alpha = |\vec{n}| \cdot \cos \alpha$$

$$y = \vec{n} \cdot \vec{j} = |\vec{n}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \beta = |\vec{n}| \cdot \cos \beta$$

$$z = \vec{n} \cdot \vec{k} = |\vec{n}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos \gamma = |\vec{n}| \cdot \cos \gamma$$

pa je

$$\vec{n} = (|\vec{n}| \cos \alpha, |\vec{n}| \cos \beta, |\vec{n}| \cos \gamma)$$

odnosno ako je \vec{n}_0 jedinični vektor $|\vec{n}_0| = 1$

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

6.2.1 Rastojanje dve tačke u prostoru

Ako su u prostoru date dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ onda je njihovo međusobno rastojanje $\overline{M_1M_2}$ jednako intenzitetu vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$. Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ može se predstaviti kao:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

gde su $\overrightarrow{OM_2}$ i $\overrightarrow{OM_1}$ vektori položaja tačaka M_1 i M_2 , pa je $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$ odnosno

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Sledi da je

$$\overline{M_1M_2} = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

rastojanje između tačke M_1 i M_2 u prostoru.

6.3 Analitička geometrija u ravni

U ovom odeljku posmatraćemo tačke u ravni, odnosno u dvodimenzionalnom koordinatnom sistemu Oxy u kome svaka tačka ima dve koordinate, x i y . Neka su a i b koordinate tačke $O'(a, b)$. Ako se koordinatni sistem Oxy translira (translatorno pomeri) za vektor OO' dobiće se novi koordinatni sistem $O'x'y'$. Ako je tačka M u ravni u odnosu na koordinatni sistem Oxy imala koordinate x i y , onda će ona u odnosu na koordinatni sistem $O'x'y'$ imati nove koordinate x' i y' . Pri tome između starih i novih koordinata postoji sledeća veza

$$\begin{aligned} x &= x' + a & (x' &= x - a) \\ y &= y' + b & (y' &= y - b) \end{aligned}$$

Sem translacije koordinatnog sistema, može se izvršiti i njegova rotacija oko koordinatnog početka O . Rotacijom koordinatnog sistema Oxy u ravni oko tačke O za ugao α dobija se novi koordinatni sistem $Ox'y'$. Posmatraćemo sada neki vektor $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ koji je u Oxy jednak

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

gde su \vec{i} i \vec{j} ortovi koordinatnih osa Ox i Oy

Taj isti vektor će, međutim, u sistemu $Ox'y'$ imati oblik

$$\overrightarrow{OM} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$$

gde su sada \vec{i}' i \vec{j}' ortovi koordinatnih osa Ox' i Oy' . Drugim rečima u koordinatnom sistemu $Ox'y'$ je $\overrightarrow{OM} = (x', y')$.

Kako je

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$$

to ako se ova jednakost skalarno pomnoži vektorom \vec{i} dobija se

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

jer je $i \cdot i = 1, i \cdot j = 0, \angle(i, i') = \alpha, \angle(i, j') = \frac{\pi}{2} + \alpha$

Sa druge strane, ako se ista jednakost skalarno pomnoži vektorom \vec{j} dobija se

$$y = x' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y' \cos \alpha$$

jer je $i \cdot j = 0, j \cdot j = 1, \angle(j, i') = \frac{\pi}{2} - \alpha, \angle(j, j') = \alpha$

Drugim rečima, stare koordinate x i y vektora \overrightarrow{OM} (odnosno tačke M) povezane su novim koordinatama x' i y' , dobijenim rotacijom koordinatnog sistema za ugao α , jednakostima

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

6.3.1 Opšta jednačina krive drugog reda

Krive drugog reda, kao što su elipsa, hiperbola ili parabola se u ravni mogu zadati jednom opštom jednačinom koja glasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

pri čemu je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, što znači da bar jedan od koeficijenata A , B i C mora biti različit od 0.

Zavisno od vrednosti koeficijenata A , B , C , D , E i F , opšta jednačina krive drugog reda definiše elipsu (uključujući i kružnicu), hiperbolu ili parabolu, ali može definisati i samo jednu tačku, dve prave koje se seku, dve paralelne prave kao i dve prave koje se poklapaju. Konačno, moguće je i da ne postoji nijedna tačka sa koordinatama x i y koje zadovoljavaju ovu jednačinu. Da bismo odredili o kome od ovih slučajeva se radi, od koeficijenata opšte jednačine se formiraju dve determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$S \cdot \Delta < 0$ $S \cdot \Delta > 0$	Elipsa Prazan skup (imaginarna elipsa)
	$\Delta = 0$		Tačka
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$		Hiperbola
	$\Delta = 0$		Prave koje se seku
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$		Parabola
	$\Delta = 0$		Paralelene prave, prave koje se poklapaju, prazan skup (imaginarne prave)

Tabela 10: Podela krivih drugog reda

Ako je, pri tome, $S = A + C$ onda važi podela data tabelom 10.

Krive drugog reda, elipsa, hiperbola i parabola imaju i svoje kanonske jednačine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

za elipsu, pri čemu se za $a = b$ dobija kružnica, zatim

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

za hiperbolu, i

$$y^2 = 2px \quad p > 0$$

ili

$$x^2 = 2qy \quad q > 0$$

za parabolu.

Translacijom i rotacijom koordinatnog sistema opšta jednačina krive drugog reda može se svesti na odgovarajuću kanonsku jednačinu. Naime, ako kriva drugog reda ima osu simetrije paralelnu jednoj od koordinatnih osa onda je koeficijent uz xy jednak 0 ($B = 0$). Sem toga, ako se koordinatni početak postavi u centar krive (u slučaju krivih sa centrom, elipse i hiperbole) onda su koeficijenti uz x i y jednaki 0 ($D = E = 0$).

Ako je $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$ radi se o krivoj sa centrom koja se translacijom svodi na oblik

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0$$

gde je $F_1 = \frac{\Delta}{\delta}$, a potom rotacijom na oblik

$$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 + F_1 = 0$$

gde je $A_2 \neq 0$ i $C_2 \neq 0$. Odavde se, dalje, dobijaju kanonske jednačine elipse (realne ili imaginarne) ili hiperbole, odnosno tačke, za $F_1 = 0$.

Ako je $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0$ radi se o krivoj bez centra. Rotacijom se dobija

$$A_1x_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0$$

ili

$$C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0$$

a potom translacijom

$$A_1x_2^2 + 2E_1y_2 = 0 \quad \text{ili} \quad A_1x_2^2 + F_1 = 0 \quad \text{ako je} \quad E_1 = 0$$

odnosno

$$C_1y_2^2 + 2D_1x_2 = 0 \quad \text{ili} \quad C_1y_2^2 + F_1 = 0 \quad \text{ako je} \quad D_1 = 0.$$

6.3.2 Parametarske jednačine krive

Kriva u ravni se može zadati i parametarskim jednačinama

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t) \quad t \in T \end{aligned}$$

gde se za različite vrednosti parametra dobijaju odgovarajuće koordinate tačaka x i y .

Tako su, na primer, parametarske jednačine kružnice poluprečnika r sa centrom u koordinatnom početku

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

dok su parametarske jednačine elipse sa centrom u koordinatnom početku čije su poluose a i b

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}$$

Kriva koju opisuje tačka na kružnici koja se bez klizanja kotrlja duž jedne prave i koja se naziva *cikloida* najčešće se zadaje svojim parametarskim jednačinama

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t) \\y &= a(1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

a isto tako i "zvezdasta" kriva, ili *astroida*

$$\begin{aligned}x &= a \cos^3 t \\y &= a \sin^3 t \quad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

6.3.3 Polarne jednačine krive

Sem u Dekartovom, pravouglom koordinatnom sistemu, kriva u ravni može se zadati i u polarnom koordinatnom sistemu koji obrazuju tačka O i poluprava Op . Tačka O je pol, a Op polarna osa ovog koordinatnog sistema. Koordinate tačke M u polarnom koordinatnom sistemu su intenzitet njenog vektora položaja $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ kao i ugao ϕ između vektora položaja \overrightarrow{OM} i polarne ose Op , pa je tačka data sa $M(\rho, \phi)$.

Ako se pol O polarnog koordinatnog sistema poklapa sa koordinatnim početkom Dekartovog koordinatnog sistema, a polarna osa sa x osom, onda su Dekartove i polarne koordinate povezane jednačinama

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x} \quad x \neq 0\end{aligned}$$

Kružnica poluprečnika r sa centrom u polu O ima u polarnom koordinatnom sistemu jednačinu $\rho = r$. Prava koja prolazi kroz pol pod uglom ϕ_0 ima jednačinu $\phi = \phi_0$, dok prava koja ne prolazi kroz pol ima jednačinu $\rho = \frac{p}{\cos(\phi - \phi_0)}$.

Elipsa, parabola i hiperbola date su jednačinom

$$\rho = \frac{ed}{1 - e \cos \phi}$$

dok je kriva u obliku petlje, *lemniskata* data sa

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\phi$$

a "srcolika" *kardioida* sa

$$\rho = 2a(1 + \cos \phi)$$

6.4 Ravan

Od ovog odeljka ponovo ćemo se vratiti posmatranju tačaka u prostoru, odnosno u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu O_{xyz} . Najpre ćemo razmotriti koje jednačine zadovoljavaju sve tačke koje pripadaju jednoj ravni.

Neka je data tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektor $\vec{n} = (A, B, C)$. Kroz tačku M_0 moguće je postaviti jednu i samo jednu ravan α normalnu na vektor \vec{n} . Ako je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka u ravni, onda vektor $\overrightarrow{M_0M}$ leži u ravni, pa su ovaj vektor i vektor \vec{n} međusobno normalni. Ako je $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ vektor položaja tačke M_0 , a $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vektor položaja tačke M , onda je

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Iz normalnosti vektora $\overrightarrow{M_0M}$ i \vec{n} sledi da je njihov skalarni proizvod

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

ili, izraženo preko vektora \vec{r} i \vec{r}_0

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

odnosno

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = 0$$

Ako se se za skalarni proizvod fiksnih vektora \vec{n} i \vec{r}_0 uvede oznaka

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_0 = -D$$

dobije se jednačina

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$$

Ova jednačina predstavlja jednačinu ravni u opštem (vektorskom) obliku, odnosno *opštu vektorsku jednačinu ravni*. Ovu jednačinu zadovoljava proizvoljni vektor položaja r tačke u ravni.

Kako je dalje $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ to je

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

pa se iz

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

dobija

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

odnosno

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

jer je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = -\vec{n} \cdot \vec{r}_0$. Ova jednačina predstavlja jednačinu ravni u opštem (skalarnom) obliku, odnosno *skalarnu jednačinu ravni* kroz jednu datu tačku sa poznatim vektorom normale na ravan.

Vektor \vec{n} određuje ravan α samo svojim pravcem, dok intenzitet i smer tog vektora mogu biti proizvoljni. Ravan dakle ima beskonačno mnogo vektora normale.

Ako je $D = 0$ onda koordinatni početak pripada ravni. Ako je, pak, $D \neq 0$ onda se jednačina ravni može zapisati i u *segmentnom* (kanoničkom) ili normalnom obliku:

$$\frac{z}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$$

gde je $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$.

Tačke $M(a, 0, 0)$, $N(0, b, 0)$ i $P(0, 0, c)$ su tačke koje pripadaju ravni i istovremeno leže na koordinatnoj osi Ox , Oy i Oz , respektivno. Prema tome, veličine a , b i c predstavljaju odsečke (segmente) koje ravan odseca na koordinatnim osama.

6.4.1 Rastojanje tačke od ravni

Ako je $N(x, y, z)$ neka tačka *van* ravni, a $N_0(x_0, y_0, z_0)$ njena ortogonalna projekcija u ravan, tada je $\overline{NN_0}$ rastojanje tačke N od ravni. Kako je

$$\overline{ON_0} = \overline{ON} + \overline{NN_0}$$

to je

$$\overline{NN_0} = \overline{ON_0} - \overline{ON}$$

Ako sada uvedemo oznake $\vec{r} = \overline{ON}$ i $\vec{r}_0 = \overline{ON_0}$ tada je $\overline{NN_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}$. Množenjem ove jednačine skalarno sa \vec{n} gde je \vec{n} vektor normale ravni dobijamo

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{NN_0} = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}$$

Kako je N_0 tačka u ravni to je

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_0 = -D$$

pa je, prema tome

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{NN_0} = -D - \vec{n} \cdot \vec{r}$$

odnosno, kako je ugao između \vec{n} i $\overrightarrow{NN_0}$ ili 0 ili π , odnosno njegov kosinus je ili 1 ili -1 , to dobijamo

$$\pm |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{NN_0}| = -(\vec{n} \cdot \vec{r} + D)$$

odakle sledi

$$|\overrightarrow{NN_0}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r} + D|}{|\vec{n}|}$$

odnosno

$$|\overrightarrow{NN_0}| = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ovom jednačinom je, dakle, dato rastojanje tačke $M(x, y, z)$ od ravni $Ax + By + Cz + D = 0$. Ako je tačka M u ravni ona zadovoljava jednačinu ravni, pa će u tom slučaju u jednačini ravni $|Ax + By + Cz + D|$ biti jednako 0, odnosno i samo rastojanje tačke od ravni jednako 0.

Ako su date dve ravni

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

onda je ugao između tih ravni jednak uglu između njihovih vektora normale $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, odnosno

$$\cos \angle(\alpha_1, \alpha_2) = \cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Ako je $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (ravni su međusobno normalne), onda je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ odnosno $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Ako je $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (ravni su međusobno paralelne) onda je

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k$$

Ako se paralelne ravni poklapaju onda za svaku tačku $M(x_0, y_0, z_0)$ koja pripada jednoj odnosno drugoj ravni važi

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$$

Kako ravni koje se poklapaju imaju vektore normala koji su kolinearni to iz proporcionalnosti koordinata ovih vektora sledi $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, $C_1 = kC_2$, pa prva od gornje dve jednačine postaje

$$kA_2x_0 + kB_2y_0 + kC_2z_0 + D_1 = 0$$

dok se množenjem druge jednačine sa k dobija

$$kA_2x_0 + kB_2y_0 + kC_2z_0 + kD_2 = 0$$

Oдавde sledi da je $D_1 = kD_2$, odnosno $\frac{D_1}{D_2} = k$ pa za ravni koje se poklapaju važi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

6.5 Prava u prostoru

Ako je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka u prostoru, a $\vec{p} = (l, m, n)$ neki vektor, onda postoji samo jedna prava p koja prolazi kroz tačku M_0 , a paralelna je vektoru \vec{p} . Vektor \vec{p} je vektor pravca prave p . Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka na pravoj p , onda važi

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$$

S druge strane ako je \vec{r}_0 vektor položaja tačke M_0 , a \vec{r} vektor položaja tačke M , onda je $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, pa važi

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{p}$$

Ovi vektori su, dakle, kolinearni, pa za njih uvek postoji neko $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvo da je

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{p}$$

odakle dobijamo

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{p}$$

što je *parametarska vektorska jednačina* prave p .

Sa druge strane iz kolinearnosti vektora sledi i da im je vektorski proizvod jednak nuli, odnosno

$$\vec{p} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

odakle dobijamo

$$\vec{p} \times \vec{r} - \vec{p} \times \vec{r}_0 = 0$$

pa ako sa \vec{q} označimo vektor $\vec{p} \times \vec{r}_0$ onda je

$$\vec{p} \times \vec{r} = \vec{q}$$

što predstavlja *opštu vektorsku jednačinu* prave.

Kako je $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a $\vec{p} = (l, m, n)$ to iz

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}$$

sledi

$$x = x_0 + tl$$

$$y = y_0 + tm$$

$$z = z_0 + tn$$

što su *parametarske jednačine prave*.

Iz parametarskih jednačina prave dobijamo

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

odnosno *normale (kanoničke) jednačine prave*.

Kanoničke jednačine prave mogu se transformisati u dve linearne jednačine sa tri nepoznate, koje s mogu interpretirati kao jednačine dveju ravni u čijem preseku je zadata prava. Obrnuto, ako se dve ravni

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

i

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

seku, onda je tim linearnim jednačinama zadata njihova presečna prava.

Ako su date dve prave

$$p_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$p_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

onda je ugao između te dve prave jednak uglu između njihovih vektora pravaca $\vec{p}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ i $\vec{p}_2 = (l_2, m_2, n_2)$

$$\cos \angle(p_1, p_2) = \cos(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Ako su prave paralelne onda je i $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ pa je

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Ako su prave normalne onda je i $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2$ odakle je

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Prave koje nisu paralelne mogu se seći ili biti mimoilazne. Ako se seku, onda je vektor $\overrightarrow{M_1 M_2}$ koji spaja proizvoljnu tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ sa prave p_1 sa proizvoljnom tačkom $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sa prave p_2 komplanaran sa vektorima \vec{p}_1 i \vec{p}_2 . Kako je $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ to iz komplanarnosti ova tri vektora sledi da im je mešoviti proizvod jednak 0, odnosno

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

što je uslov da se dve prave seku.

Najkraće rastojanje između dve prave dato je sa

$$d = \frac{|(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|}$$

Ovo rastojanje jednako je visini H paralelepipeda konstruisanog nad vektorima \vec{p}_1 , \vec{p}_2 i $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

Kako je $V = B \cdot H$ gde je $V = |(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|$, a $B = |\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|$ to je

$$H = \frac{V}{B} = \frac{|(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2|}$$

što predstavlja najkraće rastojanje između dve mimoilazne prave.

6.6 Odnos prave i ravni

Ako su date prava

$$p : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

i ravan

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

onda se pod uglom φ između prave i ravni podrazumeva ugao između prave i njene ortogonalne projekcije u ravan. Taj ugao je komplementaran sa uglom između prave i vektora normale ϕ , odnosno

$$\varphi + \phi = \frac{\pi}{2}$$

Kako za komplementarne uglove važi da je sinus jednog ugla jednak kosinusu drugog, kao i obratno, to je

$$\sin \varphi = \cos \phi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$$

odnosno

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Prava je normalna na ravan ako je njen vektor pravca kolinearisan sa vektorom normale ravni ($\vec{p} \parallel \vec{n}$), odnosno, ako je

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

Prava i ravan su paralelne ako je vektor pravca prave normalan na vektor normale ravni ($\vec{p} \perp \vec{n}$), što znači da je $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$, odnosno

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Da bi prava ležala u ravni potrebno je i dovoljno da je $\vec{p} \perp \vec{n}$ i da tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ koja pripada pravoj p istovremeno pripada i ravni α , odnosno da je

$$\begin{aligned} Al + Bm + Cn &= 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0 \end{aligned}$$

Ako se prava i ravan seku presečna tačka se najlakše dobije kada se iz parametarskih jednačina prave

$$x = x_0 + tl \quad y = y_0 + tm \quad z = z_0 + tn$$

i jednačine ravni

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

formira jednačina

$$A(x_0 + tl) + B(y_0 + tm) + C(z_0 + tn) + D = 0$$

i reši po t , pa se na osnovu rešenja ove jednačine po parametru $t = t_1$ odrede koordinate presečne tačke $x_1 = x_0 + lt_1$, $y_1 = y_0 + mt_1$, $z_1 = z_0 + nt_1$.

6.7 Površi u prostoru

Opšti oblik površi u prostoru dat je jednačinom

$$z = f(x, y)$$

ili

$$F(x, y, z) = 0$$

Ako je

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J$$

onda se radi o površi drugog reda.

Ako je pri tome $A = B = C$ i $D = E = F = 0$ iz ove jednačine može se izvesti jednačina oblika

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

koja predstavlja jednačinu *sfere* sa centrom u tački $C(a, b, c)$ poluprečnika R .

Ovde ćemo samo navesti još neke površi drugog reda, koje pri tome mogu biti i rotacione, konusne ili cilindrične. Rotacione površi nastaju rotacijom neke krive C oko fiksne prave koja se naziva *osom rotacije*, a konusne površi opisuje prava, koja se naziva *generatrisa*, a koja prolazi kroz neku fiksnu tačku i kreće se duž neke krive D koja se naziva *direktrisa*. Cilindrične površi opisuje prava (generatrisa) koja se translatorno kreće duž krive D (direktrise). Sve površi drugog reda ovde će biti date jednačinama u kanoničkom obliku.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ predstavlja elipsoid. Ako je $a = b = c$, onda se radi o sferi. Ako se ova površ preseca ravnima, dobijaju se elipse.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ su jednačine jednolisnog odnosno dvolisnog hiperboloida. Preseci ovih površi sa ravnima daju elipse (ako je ravan paralelna sa koordinatnom ravni Oxy) ili hiperbole (ako je ravan paralelna sa koordinatnom ravni Oxz) ili dve prave koje se seku.
3. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ i $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ predstavlja eliptičkog i hiperboličkog paraboloida. Ako se ove površ preseku ravnima dobijaju se elipse i parabole, odnosno hiperbole i parabole.
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ predstavlja konus drugog reda.
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $y^2 = 2px$ su jednačine eliptičkog, hiperboličkog i paraboloidnog cilindra.
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} = 1$ i $x^2 = 0$ su jednačine dve ravni koje se seku, dve paralelne ravni i jedne ravan (yOz).

Kao što smo videli, preseci površi drugog reda sa ravnima daju krive drugog reda koje se nazivaju još i *konusni preseci*. Opšti oblik konusnih preseka u ravni xOy može se dobiti iz jednačine površi drugog reda za $z = 0$ i glasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

što odgovara opštoj jednačini krive drugog reda.