Rudarsko-geološki fakultet Beograd, 23. januar 2009.
Rudarski odsek

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE I

1. Izračunati:

$$\frac{z_1^{22} - \bar{z}_1^{22}}{z_2^{19} + \bar{z}_2^{19}},$$

gde je $z_1 = 1 + i$, a $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

2. Rešiti matričnu jednačinu $AX = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Rešiti pomoću determinanti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x + y + 2z + u &= 5 \\ 3x - 2y - 4z + 2u &= 0 \\ 2x - 5y - 6z - u &= 9 \\ -x - 4y + 3z + 2u &= 1 \end{aligned}$$

4. Dati su vektori $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \beta\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, i $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Odrediti α i β tako da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, i $\vec{c}$ komplanarni i da je $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \perp \vec{c}$.

5. Date su tačke $A(-1,2,-1)$, $B(-3,4,0)$, $C(1,-2,2)$, i $D(4,-1,1)$. Naći najkraće rastojanje izmedju pravih AB i CD.

REZULTATI:

1. $-\frac{i}{128}$

2. $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $D_s = -160, \quad x = 6, y = -2, z = 3, u = -5.$

4. $\alpha = -1,\ \beta = 3$

5. $\frac{34}{\sqrt{74}}$

Rudarsko-geološki fakultet Beograd, 27. april 2009.
Rudarski odsek

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE I

1. U skupu kompleksnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$(1-2i)z_1 + 4i\overline{z}_2 = 18-3i, \qquad (2+3i)\overline{z}_1 + (-3+i)z_2 = -12+5i.$$

2. Odrediti vrednost realnog parametra x tako da rang matrice $A = \begin{bmatrix} x & 14 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ bude jednak 2.

3. Rešiti pomoću determinanti, diskutovati i proveriti sistem linearnih jednačina (a je realan parametar)

$$\begin{aligned} 2x + ay + az &= 1 \\ ax + y + 3z &= a \\ 4x - y + 3z &= -a \end{aligned}$$

4. Dati su vektori $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Naći ugao φ koji obrazuju vektori $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ i $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$.

5. Date su tačke $A(3,-1,3)$, $B(2,0,1)$, $C(-3,1,4)$ i $D(2,\lambda,-1)$. Za koju vrednost parametra λ je ravan koju odredjuju tačke A, B i C normalna na ravan koju odredjuju tačke A,B i D

REZULTATI:

1. $z_1 = 4-3i, \quad z_2 = 2+5i$

2. $x = 14$

3. Za $a \neq -1,3$, $x = \frac{6(a-1)}{4(a-3)}$, $y = \frac{a^2+3a-12}{4(a-3)}$, $z = \frac{(a+4)(a-1)}{-4(a-3)}$; za $a = -1$ sistem je neodredjen sa jednim stepenom slobode; za $a = 3$ sistem nema rešenja.

4. $\cos\varphi = \frac{22}{\sqrt{702}} = 0,83033...$

5. $\lambda = 6$

Rudarsko-geološki fakultet Beograd, 17. jun 2009.
Rudarski odsek

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE I

1. Naći u skupu kompleksnih brojeva sva rešenja jednačine

$$\frac{iz^4 - 1}{iz^4 + i} = -i$$

2. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Odrediti vrednost parametra t tako da matrica $B = (A + A^T)^2$ bude skalarna.

3. Rešiti pomoću determinanti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z - u &= -2 \\ -3x + 2y - 2z + 5u &= 1 \\ -3x + 4y + 5z - 8u &= 8 \\ 4x - 3y + 3z + 4u &= 1 \end{aligned}$$

4. Dati su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Naći ugao φ koji obrazuju vektori $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ i $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$.

5. Kroz prodor prave $p\ :\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-3}$ u ravan $\alpha\ :\ x - 2y + 3z = 8$, postaviti pravu p_1 koja leži u ravni α i normalna je na p.

REZULTATI:

1. $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

2. $t = -1$

3. $D_s = -675,\ x = -\frac{2}{5},\ y = \frac{3}{5},\ z = \frac{6}{5},\ u = \frac{1}{5}$

4. $\cos\varphi = \frac{3}{5}\sqrt{2} = 0,84852...$

5. $p_1\ :\ \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-2}{-5}$

Rudarsko-geološki fakultet Beograd, 31. avgust 2009.
Rudarski odsek

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE I

1. U skupu kompleksnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$(2+i)z_1 - (3+2i)z_2 = 21+i, \qquad (1-i)\overline{z}_1 + (1+3i)z_2 = 19+6i.$$

2. Rešiti matričnu jednačinu $AX + A = X$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Rešiti pomoću determinanti, diskutovati i proveriti sistem linearnih jednačina (a je realan parametar)

$$\begin{aligned} ax + 2y + z &= 3 \\ 8x + ay + 2z &= 6 \\ -x - ay + 5z &= a+6 \end{aligned}$$

4. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $A(2,3,5)$ i normalna je na ravni $\alpha : 6x - 2y - 7z + 3 = 0$ i $\beta : 5x - y - 5z + 7 = 0$.

5. Izračunati površinu trougla koji odredjuju prave

$$p_1 : \tfrac{x+2}{-1} = \tfrac{y-6}{2} = \tfrac{z+5}{-2}, \quad p_2 : \tfrac{x-5}{1} = \tfrac{y-4}{1} = \tfrac{z-9}{2}, \quad p_3 : \tfrac{x-6}{2} = \tfrac{y+1}{-1} = \tfrac{z-11}{4}.$$

REZULTATI:

1. $z_1 = \frac{97}{4} + \frac{17}{4}i, \quad z_2 = \frac{41}{4} + \frac{15}{4}i.$

2. $X = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. Za $a \neq -3, 4$, $x = \frac{9-a}{7(a+3)}$, $y = \frac{18-2a}{7(a+3)}$, $z = \frac{a^2+16a+27}{7(a+3)}$; za $a = 4$ sistem je neodredjen sa jednim stepenom slobode; za $a = -3$ sistem nema rešenja

4. $3x - 5y + 4z = 11$

5. Prave odredjuju trougao $\triangle ABC$, $A(1,0,1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,2,-1)$ čija je površina $P = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Rudarsko-geološki fakultet — Beograd, 21. septembar 2009.
Rudarski odsek

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE I

1. Izračunati:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{46},$$

gde je $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

2. Odrediti vrednost parametra p tako da matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ bude komutativna sa matricom $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ u odnosu na matrično množenje.

3. Rešiti pomoću determinanti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 3z - 2u &= 1 \\ -3x + 2y - 4z + 2u &= 0 \\ 5x - 3y - 4z - 4u &= 2 \\ 7x + 4y + 4z + 3u &= 3 \end{aligned}$$

4. Dati su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Naći $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ i ugao α izmedju vektora $\vec{a}$ i ravni odredjene vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

5. Date su prave:

$$p_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-9}{4} \qquad p_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

Pokazati da se prave p_1 i p_2 seku i napisati jednačinu normale na p_1 i p_2 koja prolazi kroz njihovu presečnu tačku.

REZULTATI:

1. $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

2. $p = -1$

3. $D_s = 237, \quad x = \frac{2}{3}, y = -\frac{4}{3}, z = -\frac{1}{3}, u = \frac{5}{3}.$

4. $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}, \ \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. Presečna tačka $P(2, 1, 5)$ a jednačina normale $\frac{x-2}{11} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-5}$